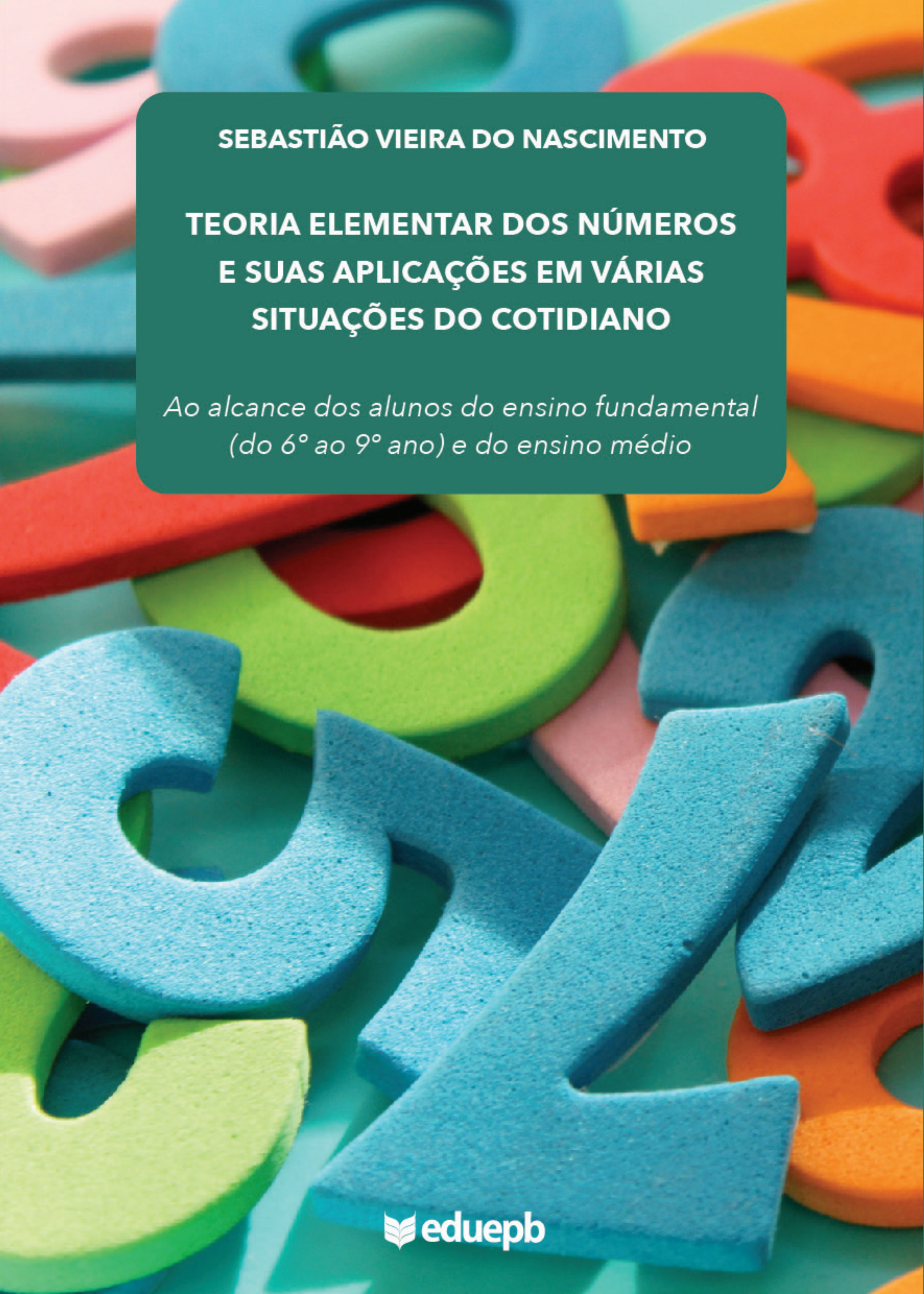


SEBASTIÃO VIEIRA DO NASCIMENTO

TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS E SUAS APLICAÇÕES EM VÁRIAS SITUAÇÕES DO COTIDIANO

Ao alcance dos alunos do ensino fundamental (do 6º ao 9º ano) e do ensino médio

eduepb

Universidade Estadual da Paraíba
Prof. Antonio Guedes Rangel Junior | *Reitor*
Prof. Flávio Romero Guimarães | *Vice-Reitor*

Editora da Universidade Estadual da Paraíba
Luciano Nascimento Silva | *Diretor*
Antonio Roberto Faustino da Costa | *Editor Assistente*
Cidoval Morais de Sousa | *Editor Assistente*

Editora filiada a ABEU

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Rua Baraúnas, 351 - Bairro Universitário - Campina Grande-PB - CEP 58429-500
Fone/Fax: (83) 3315-3381 - http://eduepb.uepb.edu.br - email: eduepb@uepb.edu.br

Sebastião Vieira do Nascimento (Sebá)

TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS E SUAS APLICAÇÕES EM VÁRIAS SITUAÇÕES DO COTIDIANO

Ao alcance dos alunos do ensino fundamental
(do 6º ao 9º ano) e do ensino médio

eduepb

Campina Grande-PB
2019

EDITORA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Diretor
Luciano do Nascimento Silva

Design Gráfico e Editoração
Erick Ferreira Cabral
Jefferson Ricardo Lima Araujo Nunes
Leonardo Ramos Araujo

Revisão Linguística
Elizete Amaral de Medeiros
Antonio de Brito Freire

Divulgação
Danielle Correia Gomes

Comercialização
José Igor Macedo Silva

Foto da Capa
Pixabay.com

Depósito legal na Biblioteca Nacional, confome Lei nº 10.994, de 14 de dezembro de 2004.
FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA HELIANE MARIA IDALINO SILVA - CRB-15ª/368

510.7

N244t Nascimento, Sebastião Vieira do (Sebá).

Teoria elementar dos números e suas aplicações em várias situações do cotidiano: ao alcance dos alunos do ensino fundamental (do 6º ao 9º ano) e do ensino médio. Sebastião Vieira do Nascimento (Sebá). - Campina Grande: EDUEPB, 2018.

2593 kb, p.: 262.

Modo de acesso: www.eduepb.uepb.edu.br/e-books
ISBN: 978-85-7879-538-2
ISBN (E-book): 978-85-7879-543-6

1. Matemática (Ensino Médio). 2. Matemática (Ensino fundamental). 3. Matemática aplicada-cotidiano. 4. Teoremá de Sebá. 5. Teorema de Fermat. I. Título.

21. ed. CDD

SUMÁRIO

PREFÁCIO

No dia em que este livro chegar às livrarias, o caro leitor (ou aluno) irá perguntar a si mesmo: “se já existem no Brasil tantos livros escritos sobre a matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, por que mais um livro?” Já que existem vários motivos para uma pessoa escrever um livro, é difícil responder à pergunta formulada acima.

No meu caso, porém, existiam dois motivos fortes para escrever o presente livro. O primeiro, uma preocupação antiga com o que chamo certos autores de verdadeiros massacradores de cérebro. E o segundo, em virtude da literatura existente em língua portuguesa sobre a matemática dos Ensinos Fundamental e Médio aplicada à vida, apresentar livros excelentes em determinados assuntos ou incompletos em outros. Desse modo, torna-se necessário o leitor (ou aluno) recorrer às diversas obras existentes para obter um embasamento total da matéria.

A primeira preocupação levou-nosa escrever este livro para transmitir conhecimentos, e não para mostrá-los o que é próprio dos massacradores de cérebro.

O segundo motivolevou-nos a uma tarefa árdua: incluir em um único volume, o que com algumas dificuldades encontra-se em vários livros de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio.

Para que servem realmente as equações do 1º e 2º graus, o máximo divisor comum, os divisores de um número, o gráfico da equação do 1ºgrau, a progressão geométrica, logaritmos decimal e natural, ternos pitagóricos, númersos complexos, etc.? Parafraseando o professor A. P. Ricieri, talvez o caro leitor responda: se pensar nessa pergunta baseando-me naquilo que me “ensinaram” nas escolas “chatas” da vida, afirmaria: PARA NADA! No entanto, pensando melhor sobre o assunto, responderia: PARA SER COBRADA NAS PROVAS! Porém, meditando compenetradamente no tema, diria: TAÍ ALGO QUE REALMENTE NÃO SEI?

Não sei se o aluno que está frequentando, ou aquele que já frequentou a escolados Ensinos Fundamental e Médio, concorda com a resposta. Sinceramente, concordo. Concordo, porque durante o período no qual frequentei a escola dos Ensinos Fundamental (antigos primário e ginásio) e Médio (antigo científico) em momento algum tive a oportunidade de ver, em sala de aula, uma só aplicação da matemática ensinada.

Após muitos anos pesquisando em livros, revistas e entrevistando pessoas dos setores agrícola, industrial e de serviços, pôde-seconstatar que existem muitos problemas com os quais nos defrontamos no dia a diaque podem ser resolvidos com os assuntos supracitados. E por meio dessas pesquisas chegou-se às seguintes conclusões:

a) a aversão que o aluno tem à matemática, decorre da distância que os Ensinos Fundamental e Médio guardamda realidade em que vive;
b) já que o aluno não consegue fazer a conexão entre o que aprende e suas necessidades do dia a dia, daí vem o desinteresse e, em consequência, a aversãoà matemática;
c) toda a matemática dos Ensinos Fundamental e Médio é importante para a vida do aluno, mas da forma como é “ensinada” não serve para nada.

Para que ensinar os assuntos supracitados, somente pelo fato de esses assuntos fazerem parte do currículo do Ministério da Educação? Para mim é coisa que, isolada, não significa absolutamente nada. Pior: atrapalha a carreira de muitos jovens.

Como podemos esperar algum resultado do ensino da matemática, se cujas ementas não mencionam aplicações? Ou será que o que consta nas ementas é apenas para ser cobrado nas provas?

Como seria estimulante, para todos os alunos, se o professor mostrasse o quanto é poderoso e fundamental aquilo que estão aprendendo!

Pelas conclusões as quais se chegou, recomenda-se aos senhores professores dos Ensinos Fundamental e Médio: que ao ensinarem os assuntos supracitados, procedam de tal modo que os alunos tenham uma formação de conceitos e princípios lógicos e práticos e, além disso, tenham como finalidade a resolução de problemas do dia a dia.

Se antes, nos Ensinos Fundamental e Médio, a matemática não se processava de tal modo, em virtude de os professores não terem ao seu alcance o material necessário para alcançar tal objetivo, agora, com o livro, TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS E SUAS APLICAÇÕES EM VÁRIAS SITUAÇÕES DO COTIDIANO em mãos, temos plena certeza de que, futuramente, três coisas irão acontecer nas escolas dos Ensinos Fundamental e Médio:

a) a distância irá diminuir bastante, entre o ensino da matemática e a realidade em que vivem os alunos;
b) o aluno irá conseguir fazer a conexão entre o que aprendeu e suas necessidades do dia a dia. Daí, então, o interesse pela matemática e, consequentemente, o gosto por ela;
c) tudo o que for ensinado:máximo divisor comum, divisores de um número, equação do 1º e 2º graus, gráfico da equação do 1º grau, ternos pitagóricos, etc. servirá para solucionar alguns problemas que porvnetura o aluno venha a se defrontar na sua vida.

Escreveu-se o presente livro com o objetivo de ele ser algo útil ao ensino da matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, e não como informação exclusiva a ser cobrada em provas e exames finais.

Incluiu-se no presente livro equações diofantinas lineares mesmo que esse assunto não conste no programa do ensino médio. O meu primeiro contato com equação diofantina se deu no ano de

1971 quando iniciei a graduação e de imediato me encantei por esse tema que é tão rico, e pouco ou quase nunca é explorado nos Ensinos Fundamental e Médio. Atualmente tenho percebido em diversos problemas da OBMEP e em alguns vestibulares, questões solucionáveis por equações diofantinas e desde então uma pergunta passou a me incomodar. Por que não apresentar estas equações aos alunos dos Ensino Fundamental e Médio?

Não sei por que as equações diofantinas lineares não são incluídas nos currículos dos EnsinosFundamental e Médio; mas sistemas de equações lineares o são. Assim como na vida real existem problemas que para solucioná-los exigem conhecimento de sistemas de equações lineares, na vida real também existem problemas que para solucioná-los exigem conhecimento de equações diofantinas lineares. O grau de dificuldade para saber se um determinado sistema de equações lineares tem ou não soluçãoé maior do que saber se uma determinada equação diofantina linear tem ou não solução em inteiros, haja vista que para saber a existência ou não de possível(eis) solução(ões) de uma equação diofantina linear a duas incógnitas, do tipo $ax + by = c$, com a, b, c inteiros, basta achar o máximo divisor comum de a e b; se o máximo divisor comum de a e b dividir c, então, a equação diofantina linear tem solução em inteiros.

Diante do exposto, senti-me na obrigação de pesquisar situações -problemas que pudessem ser apresentadas aos alunos dos Ensino Fundamental e Médio e essas situações-problemas fossem resolvidas por meio de equações diofantinas lineares.

Já que o presente livro é dirigido para aplicação da matemática que já foi ensinada nos Ensinos Fundamental e Médio, com exceção de equações diofantinas lineares, os professoresque, porventuravenham utilizá-lo, deverão apresentar os problemas após ter lecionado os assuntos aqui abordados.

O Autor
Campina Grande (PB) – 2018

APRESENTAÇÃO

Quem conhece o trabalho do professor Sebá constata sua incessante luta pela mudança de paradigma da forma como a Matemática é "ensinada" nas escolas brasileiras. Boa parte da aversão e do desinteresse que o aluno tem a essa disciplina decorre da ausência de conexão entre o conteúdo estudado e a realidade em que ele vive.

A Matemática permeia a vida cotidiana e pode ser utilizada para explicar de modo preciso e eficiente inúmeros fenômenos. Portanto, é imprescindível mostrar ao aluno poderosas aplicações do conteúdo estudado em sala no seu dia a dia. No caso dos Ensinos Fundamental e Médio, isso é plenamente possível e negligenciar isso é o equivalente a massacrar o cérebro do aluno, apagando a chama pelo saber.

O livro TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS E SUAS APLICAÇÕES EM VÁRIAS SITUAÇÕES DO COTIDIANO reúne uma vasta quantidade de aplicações dos conteúdos estudados no Ensino Fundamental, configurando-se como um livro de cabeceira para professores aprimorarem o preparo de suas aulas. Não é uma obra para ser apenas lida, mas sim estudada, em virtude de sua natureza enciclopédica. Recomenda-se, assim, a sua utilização como uma fonte consultiva.

Esta obra também contempla diversos tópicos abordados nos exames nacionais de acesso e de qualificação ao PROFMAT* e na maioria das olimpíadas de Matemática, principalmente as equações diofantinas lineares (partes I e II do livro), as quais foram abordadas da maneira tradicional, comumente encontrada nos compêndios sobre o assunto (Algoritmo de Euclides), e de formas alternativas (Primeiro e Segundo Métodos de Sebá), mais eficientes sob o ponto de vista da simplificação do algoritmo e consequente aumento da velocidade de processamento dos cálculos. Portanto, este livro é altamente recomendado para professores que pretendem ingressar no PROFMAT, professores que preparam alunos de alta performance e estudantes olímpicos.

As partes de IV a VI apresentam interessantes aplicações do mdc (máximo divisor comum) em uma variedade de questões, todas eles devidamente resolvidas. Aqui professores encontrarão uma farta quantidade de boas questões para a elaboração de listas de exercícios bem como de provas sobre o tema.

As partes de VIII a X são densas e exigem do leitor uma dedicação adicional. Nelas serão apresentados os ternos pitagóricos, as demonstrações para a obtenção dos mesmos e suas aplicações na quadratura de retângulos.

A parte X apresenta belas aplicações de números complexos, mas foi escrita para quem já estudou esse conteúdo. Não espere uma introdução teórica ou explicações pormenorizadas, pois a intenção do autor nesse capítulo foi mais uma vez desmontar o falso argumento de que a Matemática ensinada na escola nada tem a ver com a realidade em que vivemos. De fato, aqui as vastas experiência e argúcia do professor Sebá tornam-se notórias, pois encontrar boas aplicações de números complexos acessíveis a alunos de Ensino Médio é coisa de gente grande, gente com uma sensibilidade bem acima da média .

Nas partes de XII a XXI, o leitor encontrará uma infinidade de aplicações bem particulares relacionando números inteiros e propriedades geométricas.

Na parte XXII, o leitor terá a oportunidade de conhecer o que pra mim é o resultado mais impactante do livro: um critério de divisibilidade válido para qualquer número primo superior a onze. Simples, elegante e extremamente prático, esse resultado causaria grande impacto em nossas vidas se tivesse sido descoberto antes do advento da calculadora. Sua utilização é perfeitamente adequada para estudantes a partir do Sexto Ano do Ensino Fundamental.

Na parte XXIV, o autor retoma um antigo tema tratado pelo memorável Malba Tahan no livro *AsMaravilhasdaMatemática*, corrigindo um equívoco a respeito dos números antipitagóricos ("números naturais que não figuram em nenhum terno pitagórico") e ampliando a discussão sobre esse assunto.

Finalmente, na leitura deste livro será possível constatar outro marcante fato a respeito do professor Sebá: sua impressionante capacidade de descobrir e decifrar padrões e propriedades numéricas, numa originalidade que beira à iluminação que vem do Alto.

Boa leitura! Bom estudo!

Professor Fausto Fernandes da Silva Camelo/UnB

---

* O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um programa de pós-graduação *strictosensu* em Matemática, reconhecido e avaliado pela CAPES, credenciado pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), validado pelo Ministério da Educação e conduzindo ao título de Mestre.

PARTE I

Equação Diofantina Linear

Uma equação diofantina linear é uma equação com a restrição adicional de que estamos apenas preocupados com soluções nas quais as variáveis são números inteiros. O Último Teorema de Fermat é uma equação diofantina famosa que ficou sem ser resolvida por mais de 350 anos.

As equações diofantinas lineares na forma $ax + by = c$ podem ser resolvidas de uma forma relativamente fácil usando o algoritmo de Euclides para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros. Usando o algoritmo de Euclides podemos achar 4 e 7 como a única solução em números inteiros positivos para a equação diofantina: $31x + 8y = 180$.

Não sei por que as equações diofantinas lineares não são incluídas no currículo do Ensino Médio; mas sistemas de equações lineares o são. Assim como na vida real existem problemas que para solucioná-los exigem conhecimento de sistemas de equações lineares, na vida real também existem problemas que para solucioná-los exigem conhecimento de equações diofantinas lineares. O grau de dificuldade para saber se um determinado sistema de equações lineares tem ou não soluçãoé maior do que saber se uma determinada equação diofantina linear tem ou não solução em inteiros, haja vista que para saber a existência ou não de possível(eis) solução(ões) de uma equação diofantina linear a duas incógnitas, do tipo $ax + by = c$, com a, b, c inteiros, basta achar o máximo divisor de a e b ou mdc(a, b); se o mdc(a, b) dividir c, então, a equação diofantina linear tem solução em inteiros. É o que veremos a seguir.

Generalidade

O tipo mais simples de equações diofantinas é a equação diofantina linear com duas variáveis x e y, $ax + by = c$ sendo a, b e c inteiros.

Todo par de inteiros x_0 e y_0 tal que $ax_0 + by_0 = c$ é uma solução inteira ou apenas uma solução da equação $ax + by = c$. Seja, por exemplo, a equação diofantina linear com duas incógnitas: $3x + 6y = 18$. Pelo algoritmo de Euclides, temos:

$$3(4) + 6(1) = 18$$
$$3(-6) + 6(6) = 18$$
$$3(10) + 6(-2) = 18$$

Logo, os pares de inteiros: 4 e 1; – 6 e 6; 10 e –2 são soluções da equação $3x + 6y = 18$.

Existem equações diofantinas lineares com duas incógnitas que não têm solução. Assim, por exemplo, a equação diofantina linear: $2x + 4y = 7$ não tem solução, quaisquer que sejam os valores inteiros de x e y.

De modo geral, a equação diofantina linear $ax + by = c$ não tem solução em inteiros, sempre que $d = \text{mdc}(a,b)$ não divide c.

Condição de existência da solução

Teorema 1: A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução em inteiros se e somente se d divide c, sendo $d = \text{mdc}(a,b)$.

Solução da equação *ax + by = c*

Teorema 2: Se d divide c ou seja (d/c), sendo $d = \text{mdc}(a,b)$ e se o par de inteiros x_0 e y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então, todas as outras soluções dessa equação são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \left(\dfrac{b}{d}t\right) \\ y = y_0 + \left(\dfrac{a}{d}t\right) \end{cases}$$

Sendo t um inteiro arbitrário.

Corolário 1: Se o mdc(a,b) = 1 e se x_0 e y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então, todas as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

Sendo t um inteiro arbitrário.

Se você, caro leitor, estiver interessado em ver as demonstrações dos dois teoremas acima, veja em: http://jogoseducativos.tripod.com.br/diofantina.htm.

√Exemplo

O exemplo a seguir e a sua resolução foram extraídos de Oliveira (2006).

Exemplo 1 – Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue. Uma delas examina 15 amostras de cada vez, enquanto a outra examina 25. Pergunta-se: quantas vezes essas máquinas devem ser acionadas para examinar 2000 amostras?

→ **Resolução:**

Designando, por x e y, o número de vezes que a primeira e a segunda máquinas, respectivamente, foram acionadas, basta resolver a seguinte equação diofantina linear para responder à pergunta proposta:

$$(1) \quad 15x + 25y = 2000$$

Dividindo ambos os membros da (1) por 5, obtém-se a seguinte equação equivalente:

$$(2) \quad 3x + 5y = 400$$

Como o mdc(5, 3) = 1, logo, essa equação diofantina tem solução.

Tem-se agora que encontrar uma solução particular para $3x + 5y = 400$.

Primeiramente, podemos encontrar a solução da equação $3x + 5y = 1$, pelo algoritmo de Euclides sobre o máximo divisor comum.

	1	1	2
5	**3**	**2**	**1**
2	1	0	

Esse algoritmo permite construir as seguintes expressões:

$$(3) \quad 5 = 3 \cdot 1 + 2$$
$$(4) \quad 3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$(5) \quad 2 = 1 \cdot 1 + 0$$

(3), obtém-se:

$$(6) \quad 2 = 5 - 3 \cdot 1$$

A partir da expressão (4):

$$(7) \quad 1 = 3 - 2 \cdot 1$$

Substituindo a (6) na (7), vem:

$$1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1$$

Aplicando a propriedade distributiva, obtém-se:

$$1 = 3 - 5 + 3$$

$$(8) \quad 1 = 3 \cdot 2 + 5(-1)$$

A expressão (8) indica que $x = 2$ e $y = -1$ é uma solução particular da equação $3x + 5y = 1$.

Multiplicando ambos os membros da expressão (8) por 400, obtemos:

$$400 = 3(800) + 5(-400)$$

Logo, 800 e –400 é uma solução particular da equação (2) e também será da equação original (1): 15(800) + 25(–400) = 2000. Consequentemente, a solução geral da equação (1) que apresenta mdc(25, 15) = 5, se expressa por:

$$(9) \quad x = 800 + \frac{25}{5}t \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$$

$$(10) \quad y = -400 - \frac{15}{5}t \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$$

Considerando o problema que levou a essa equação, vê-se que só interessam respostas não negativas para x e y. Assim, deve-se impor que:

$$800 + 5t \geq 0$$

$$5t \geq -800$$

$$(11) \quad t \geq -160$$

$$-400 - 3t \geq 0$$

$$-3t \geq 400$$

$$(12) \quad t \leq -133$$

Sendo assim, temos que:

$$-160 \leq t \leq -133$$

Substituindo os valores de t em (9) e (10), obtém-se 27 soluções (que apresentam valores de x e y inteiros positivos) para o problema, desde a primeira máquina parada e a outra sendo acionada 80 vezes, até o caso em que a primeira trabalha 130 vezes e a outra só 2 vezes.

Soluções usando o método que consta na dissertação:

t	–160	–159	–158	–157	...	–135	–134
x	0	5	10	15	...	125	130
y	80	77	74	71	...	5	2

A equação diofantina foi resolvida usando o algoritmo de Euclides para achar o máximo divisor comum (mdc) dos coeficientes da equação diofantina. A seguir vamos resolver a mesma equação diofantina usando o primeiro método de Sebá.

PARTE II

DOIS MÉTODOS DE SEBÁ PARA RESOLVER EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Vamos apresentar dois métodos de resolução de equações diofantinas lineares diferentes dos encontrados nos livros de teoria dos números e, além disso, mostrar alguns casos particulares nas equações diofantinas lineares com duas variáveis, que é possível resolver algumas delas sem ser necessário usar o algoritmo de Euclides.

Inicialmente iremos apresentar dois teoremas referentes à condição de existência de solução inteira das equações diofantinas lineares com duas variáveis, e em seguida apresentar alguns exemplos resolvidos por meio dos dois métodos de Sebá.

Condições do primeiro método de Sebá

Além da condição de $d = \text{mdc}(a, b)$ dividir c, o primeiro método de Sebá exige as duas seguintes condições:

a) que a seja diferente de b:

b) que a ou b (ou ambos) divida c.

c) a, b < c

Resolvendo o exemplo por meio do primeiro método de Sebá

Pelas duas condições, temos:

a) Já que a = 15 e b = 25, logo, $a \neq b$;

b) Como c = 2000 e b = 25, logo, b divide *c*.

Sempre que $a > b$ ou $b > a$, dividem-se ambos os membros da equação diofantina linear por *a* ou *b*.

Como no exemplo $b > a$, dividindo ambos os membros de (1) por 25, obtém-se:

$$\frac{3}{5}x + y = 80$$

Como na fração do coeficiente de x o denominador é 5, logo, para $x = 5$, temos:

$$\frac{3}{5}(5) + y = 80$$
$$3 + y = 80$$
$$y = 77$$

Logo, $x = 5$ e $y = 77$ é uma solução particular da equação (1), e consequentemente, a solução geral da equação (1) que apresenta mdc(25, 15) = 5, se expressa por:

$$(13) \quad x = 5 + \frac{15}{5}t = 5 + 5t, \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$$
$$(14) \quad y = 77 - \frac{15}{5}t = 77 - 3t, \quad \forall\, t \in \mathbb{Z}$$

Considerando o problema que levou a essa equação, vê-se que só interessam respostas não negativas para x e y. Assim, deve-se impor que:

$$5 + 5t \geq 0, \quad \text{então } t \geq -1$$
$$77 - 3t \geq 0, \quad \text{então, } t \leq 25$$

Sendo assim, então:

$$-1 \leq t \leq 25, \quad \text{para } t \in \mathbb{Z}$$

Substituindo os valores de t em (13) e (14), obtém-se 27 soluções (que apresentam valores de x e y inteiros positivos) para o problema, desde a primeira máquina parada e a outra sendo acionada 80 vezes, até o caso em que a primeira trabalha 130 vezes e a outra só 2.

Soluções usando o método de Sebá

t	–1	0	1	2	...	24	25
x	0	5	10	15	...	125	130
y	80	77	74	71	...	5	2

Comparando as duas tabelas, constata-se que as soluções obtidas usando o método que consta na dissertação são as mesmas soluções obtidas usando o método de Sebá.

Exemplo 2 – Resolver a equação diofantina 3x + 5y = 100.

→ **Resolução:**

Como o mdc(5, 3) = 1 e 1 divide 100, logo, a equação tem solução em inteiros. Pelas duas condições do método de Sebá, temos:

a) Já que a = 3 e b = 5, logo, a ≠ b;

b) Como c = 100 e b = 5, logo, b divide c.

Como $b > a$, dividindo ambos os membros por 5, obtém-se:

$$\frac{3x}{5}+\frac{5y}{5}=\frac{100}{5}$$

$$\frac{3x}{5}+y=20$$

Como na fração do coeficiente de x_o denominador é 5, logo, para $x = 5$, temos:

$$y = 20 - 3 = 17$$

Logo, $x = 5$ e $y = 17$ é uma solução particular da equação. Consequentemente, a solução geral da equação que apresenta mdc(5, 3) = 1, se expressa por:

$$(15) \quad x = 5 + \frac{5}{1}t = 5 + 5t$$

$$(16) \quad y = 17 - \frac{3}{1}t = 17 - 3t$$

Considerando t pertencente aos inteiros, existem infinitas soluções inteiras para x e y; sendo apenas 6 não negativas.

Para $t = 0$, temos que: $x = 5$ e $y = 17$
Para $t = 1$, temos que: $x = 10$ e $y = 14$
Para $t = 2$, temos que: $x = 5$ e $y = 17$
Para $t = 3$, temos que: $x = 20$ e $y = 8$
Para $t = 4$, temos que: $x = 25$ e $y = 5$
Para $t = 5$, temos que: $x = 30$ e $y = 2$

Exemplo 3 – Resolver a equação diofantina $3x + 6y = 18$

→ **Resolução:**
Como o mdc(6, 3) = 3 e 3 divide 18, logo, a equação tem solução em inteiros. Pelas duas condições do método de Sebá, temos:
a) Já que a = 3 e b = 6, logo, a ≠ b;
b) Como c = 18, a = 3 e b = 6, logo, ambos dividem c.

Como $b > a$, dividindo ambos os membros por 6, obtém-se:

$$\frac{1}{2}x + y = 3$$

Como na fração do coeficiente de x_o denominador é 2, logo, para $x = 2$, temos:

$$\frac{1}{2}(2) + y = 3$$

$$y = 2$$

Logo, $x = 2$ e $y = 2$ é uma solução particular da equação. Consequentemente, a solução geral da equação que apresenta mdc(6, 3) = 3, se expressa por:

$$(17) \quad x = 2 + \frac{6}{3}t = 2 + 2t$$

$$(18) \quad y = 2 - \frac{3}{3}t = 2 - t$$

Considerando t pertencente aos inteiros, existem infinitas soluções inteiras para x e y; sendo apenas 3 não negativas:

Para $t = 0$, temos que: $x = 2$ e $y = 2$
Para $t = 1$, temos que: $x = 4$ e $y = 1$
Para $t = 2$, temos que: $x = 6$ e $y = 0$

Exemplo 4 – Resolver a equação diofantina linear $39x + 26y = 105$**.**

→ **Resolução:**
O mdc(39,26) = 13 e como 13 não divide 105, segue-se que a equação dada não tem solução.

Exemplo 5 – O dono de uma lanchonete faz cachorros-quentes com um pão e uma salsicha. As salsichas vêm em pacotes de 10 unidades e os pães em pacotes de 8. Pergunta-se: quantos pacotes de salsichas e de pães o dono da lanchonete deve comprar, a fim de que não sobre nem salsichas nem pães?

→ **Resolução:**
Sejam x número de pacotes de pães e y números de pacotes de salsichas.

Como as salsichas vêm em pacotes de 10 unidades e os pães em pacotes de 8, logo, ao todo são 80 unidades.

A equação diofantina é: $10x + 8y = 80$

Como o mdc(10, 8) = 2 e 2 divide 80, logo, a equação diofantina tem solução no conjuntos inteiros.

Pelas duas condições do método de Sebá, temos:
a) Já que $a = 10$ e $b = 8$, logo, $a \neq b$;
b) Como $c = 80$ e $b = 10$, logo, b divide c.

Como $b > a$, dividindo ambos os membros por 10, obtém-se:

$$\frac{10x}{10} + \frac{8y}{10} = \frac{80}{10}$$

$$x + \frac{8y}{10} = 8$$

Como na fração do coeficiente de yo denominador é 10, logo, para $y = 10$, temos:

$$x = 10 - 10 = 0$$

Logo, $x = 0$ e $y = 10$ é uma solução particular da equação diofantina. Consequentemente, a solução geral da equação diofantina que apresenta mdc(10, 8) = 2, se expressa por:

$$x = 0 + \frac{8}{2}t \geq 0$$

$$x = 0 + 4t \geq 0$$

$$x = 4t \geq 0$$

$$t \geq 0$$

$$y = 10 - \frac{10}{2}t \geq 0$$

$$y = 10 - 5t \geq 0$$

$$y \leq 2$$

$$0 \leq t \leq 2$$

$$t = 0, 1, 2$$

t	***x***	***y***
0	0	10
1	4	5
2	8	0

Resposta: Nenhum pacote de pães e 10 pacotes de salsichas (É solução da equação, mas não do problema em si. Por quê?)
Quatro pacotes de pães e 5 pacotes de salsichas.
Oito pacotes de pães e nenhum pacote de salsichas (É solução da equação, mas não do problema em si. Por quê?).

Condições do segundo método de Sebá

Além da condição de $d = \text{mdc}(a, b)$ dividir c, o segundo método de Sebá exige as duas seguintes condições:

a) o mdc(**a**, **b**) = 1

b) nem **a** nem **b** divide **c**

c) a, b < c

Regra para resolver equações diofantinas pelo segundo método de Sebá

Seja 2a (**a** o coeficiente de x). Vá multiplicando 2a e subtraindo de 1(um). O resultado de cada subtração corresponde a **b** (coeficiente de y). Quando o valor da subtração dividir b, pare.

√Exemplos de aplicação

01) Uma dona de casa leva uma quantia de R$48,00 para um supermercado, a fim de comprar dois produtos A e B, pelos preços unitários de R$18,00 e R$5,00, respectivamente. Desejando gastar os R$48,00 para essas compras, quantas unidades do produto A e quantas do produto B ela pode comprar?

a) resolva pelo algoritmo de Euclides;

b) resolva pelo primeiro ou segundo método de Sebá;

→ **Resolução:**

Sejam x e y, respectivamente, o número de unidades adquiridas dos produtos A e B. O modelo matemático é: $18x + 5y = 48$.

a) Vamos achar o mdc de 18 e 5 pelo algoritmo de Euclides:

	3	1	1	2
18	5	3	2	1
–15	–3	–2	–2	
3	2	1	0	

Esse algoritmo permite construir as seguintes expressões:

$$(1)\qquad 18 = 3 \cdot 5 + 3$$
$$(2)\qquad 5 = 1 \cdot 3 + 2$$
$$(3)\qquad 3 = 1 \cdot 2 + 1$$

Como o mdc (a, b) = 1, vamos começar a partir da expressão (3).

$$(4)\qquad 1 = 3 - 2$$

Tirando o valor de 2 na (2) e substituindo na (4), obtém–se:

$$(5)\qquad 1 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5$$

Como $18 = 5 \cdot 3 + 3$, logo, substituindo $3 = 18 - 5 \cdot 3$ na (5), obtém–se:

$$(6)\quad 1 = 2(18 - 5 \cdot 3) - 5 = 2 \cdot 18 - 2 \cdot 5 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 18 + 5(2 \cdot 3 - 1)$$

Portanto:

$$(7)\qquad 18(2) + 5(-7) = 1$$

Note que 18 e 5 são, respectivamente, os coeficientes de x e y.

A expressão (7) indica que $x = 2$ e $y = -7$ é uma solução particular da equação $18x + 5y = 1$.

Como c = 19, multiplicando ambos os membros da expressão (7) por 48, obtém-se:

$$18(2 \cdot 48) + 5(-7 \cdot 48) = 1 \cdot 48$$
$$18(96) + 5(-336) = 48$$

Logo, 96 e –336 é uma solução particular da equação 18x + 5y = 48, e, consequentemente, a solução geral da equação que apresenta mdc(18, 5) = 1, se expressa por:

$$(8)\qquad x = 96 + 5t \geq 0$$
$$(9)\qquad y = -336 - 18t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$t \geq -19 \text{ e } t \leq -18$$
$$-19 \leq t \leq -18$$

Portanto, t = – 19. Substituindo *t* em (8) e (9), obtém–se a única solução (que apresenta valor de *x* e *y* inteiros positivos) para o problema, ou seja, x = 1 e y = 6.

Resposta: A dona-de-casa poderá comprar uma unidade do produto A e 6 unidades do produto B.

b) Como o mdc(18, 5) = 1, logo, vamos usar o segundo método de Sebá.

Como *a* = 18, logo, 2 · 18 = 36 (múltiplo de 18 que é o coeficiente de *x*) e *b* = 36 – 1 = 35 (Múltiplo de 5 que é o coeficiente de *b*). Pela regra de Sebá, pode–se parar. Daí, temos:

$$(1)\ 36 - 35 = 1$$
$$(2)\ 18(2) + 5(-7) = 1$$

Como c = 48, multiplicando ambos os membros da expressão (2) por 48, obtém-se:

$$18(2 \cdot 48) + 5(-7 \cdot 48) = 1 \cdot 48$$
$$18(96) + 5(-336) = 48$$

A mesma expressão obtida por meio do algoritmo de Euclides.

Conclusão. Quando o mdc (a, b) = 1, o segundo método de Sebá é mais eficiente, em termos computacional, do que o algoritmo de Euclides.

02) João é dono de uma fábrica de perfumes. Marcelo, um de seus funcionários, saiu para vender perfumes de dois tipos diferentes, A e B. O do tipo A por R$ 18,00 e o do tipo B por R$ 12,00. Marcelo volta à fábrica e disse a João que arrecadou R$ 600,00 com as vendas dos perfumes. Pergunta-se: Marcelo está falando a verdade?

→ **Resolução:**

Sejam x e y, respectivamente, o número de unidades adquiridas dos produtos A e B. O modelo matemático que representa a equação diofantina é: 18x + 12y = 600.

Como o mdc(18,12) = 6 e 6 divide 600, logo, a equação diofantina 18x + 12y = 600 tem solução nos inteiros.

Já que 600 é divisível por 12, logo, vamos resolver a equação diofantinas 18x + 12y = 600 por meio do primeiro método de Sebá.

Dividindo ambos os membros da equação 18x + 12y = 600 por 12, obtém-se:

$$\frac{18x}{12} + \frac{12y}{12} = \frac{600}{12}$$

$$\frac{18x}{12} + y = 50$$

Se x = 12, então, y = 32

Portanto, x = 12 e y = 32é uma solução particular da equação diofantina 18x + 12y = 600 e, consequentemente, a solução geral da equaçãodiofantinas 18x + 12y = 600 que representa mdc(18,12) = 6 se expressa por:

$$x = 12 + \frac{12}{6}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad x = 12 + 2t \geq 0$$

$$y = 32 + \frac{18}{6}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad y = 32 - 3t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$\mathbf{t \geq -6 \text{ e } t \leq 10}$$
$$\mathbf{-6 \leq t \leq 10}$$

Portanto, t = – 6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Substituindo *t* em (8) e (9), obtém-se 17 soluções (que apresenta valor de *x* e *y* inteiros positivos) para o problema, conforme tabela abaixo.

t	x	y
-6	0	50
-5	2	47
-4	4	44
-3	6	41
-2	8	38
-1	10	35
0	12	32
1	14	29
2	16	26
3	18	23
4	20	20
5	22	17
6	24	14
7	26	11
8	28	8
9	30	5
10	32	2

Resposta: Conforme a tabela acima, Marcelo está falando a verdade.

03) Deseja-se construir um determinado prédio com 2 ou 3 apartamentos por andar e se deseja fazer esse prédio com 50 apartamentos. Chamando x e y número de apartamentos que estão localizados nos andares de 2 ou 3 apartamentos, respectivamente, isto nos leva à: 2x + 3y = 50. Ao encontrarmos as possíveis soluções para o problema, ainda podemos verificar que x + y é o número de andares desse prédio, o que mostraria ao aluno uma abordagem mais completa e contextualizada dessas soluções.

→ **Resolução:**

Como o mdc(3, 2) = 1, vamos resolver pelo segundo método de Sebá.

Como a = 2, logo, 2*2 = 4 (múltiplo de 2 que é o coeficiente de x) e b = 4 – 1 = 3 (Múltiplo de 3 que é o coeficiente de b). Pela regra de Sebá, pode-se parar. Daí, temos:

$$(1) \quad 4 - 3 = 1$$
$$(2) \quad 2(2) + 3(-1) = 1$$

Como c = 50, multiplicando ambos os membros da expressão (2) por 50, obtém-se:

$$2(2 \cdot 50) + 3(-1 \cdot 50) = 1 \cdot 50$$
$$2(100) + 3(-50) = 50$$

Portanto, x = 100 e y = – 50 é uma solução particular da equação diofantina 2x + 3y = 50 e, consequentemente, a solução geral da equação diofantinas 2x + 3y = 50 que representa mdc(3,2) = 1 se expressa por:

$$x = 100 + \frac{30}{1}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad x = 100 + 3t \geq 0$$

$$y = -50 - \frac{30}{1}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad y = -50 - 2t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$\mathbf{t \geq -33 \text{ e } t \leq -25}$$
$$\mathbf{-33 \leq t \leq -25}$$

Portanto, t = – 33, –32, –31, –30, –29, –28, –27, –26, –25. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se 9 soluções que apresentam valores de *x* e *y* inteiros e positivos para o problema, conforme listagem abaixo:

t	*x*	*y*
–33	1	16
–32	4	14
–31	7	12
–30	10	10
–29	13	8
–28	16	6
–27	19	4
–26	22	2
–25	25	0

17 andares: 1 andar com 2 apartamentos e 16 andares com 3 apartamentos

18 andares: 4 andares com 2 apartamentos e 14 andares com 3 apartamentos

19 andares: 7 andares com 2 apartamentos e 12 andares com 3 apartamentos

20 andares: 10 andares com 2 apartamentos e 10 andares com 3 apartamentos

21 andares: 13 andares com 2 apartamentos e 8 andares com 3 apartamentos

22 andares: 16 andares com 2 apartamentos e 6 andares com 3 apartamentos

23 andares: 19 andares com 2 apartamentos e 4 andares com 3 apartamentos

24 andares: 22 andares com 2 apartamentos e 2 andares com 3 apartamentos

25 andares: 25 andares com 2 apartamentos e nenhum andar com 3 apartamentos

04) Um fazendeiro quis testar a inteligência do filho, chamou-o e disse: “Filho, tome R$10.000,00; eu quero que você compre 100 cabeças de gado com esse dinheiro. Porém, não pode faltar nem sobrar dinheiro e devem ser 100 cabeças de gado exatas, sendo o preço de cada animal:

Touro:	R$1.000,00
Vaca:	R$500,00
Garrote:	R$50,00

E mais uma coisa: você tem que trazer no mínimo um animal de cada.”

Pergunta-se: como o filho do fazendeiro conseguiu fazer essacompra?

→ **Resolução:**

Sejam x, y e z o número de touros, vacas e garrotes, respectivamente, comprados pelo filho.

Modelando o problema, obtém-se:

$$\mathbf{x + y + z = 100 \quad (1)}$$
$$\mathbf{1000x + 500y + 50z = 10000 \quad (2)}$$

A fim de eliminar a variável z, vamos multiplicar a equação (1) por – 50 e somar com a equação (2):

$$\mathbf{950x + 450y = 5000 \quad (3)}$$

Dividindo ambos os membros da equação (3) por 50, obtém-se:

$$\mathbf{19x + 9y = 100 \text{ (Equação diofantina)}}$$

Como o mdc(19, 9) = 1 e 1 divide 100, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como nem 19 nem 9 dividem 100,logo, vamos usar o segundo método de Sebá.

$$2 \cdot 19 = 38 - 1 = 37 \text{ (37não é divisível por 9)}$$
$$3 \cdot 19 = 57 - 1 = 56 \text{ (56 não é divisível por 9)}$$
$$4 \cdot 19 = 76 - 1 = 75 \text{ (75 não é divisível por 9)}$$

....

$$18 \cdot 19 = 190 - 1 = 189 \text{ (189 é divisível por 9)}$$
$$190 - 189 = 1$$
$$19(10) + 9(-21) = 1 \quad (4)$$

Multiplicando ambos os membros da equação(4) por 100, obtém-se:

$$\mathbf{19(1000) + 9\,(-2100) = 100}$$

Portanto, x = 1000 e y = –2100 é uma solução particular da equação diofantina 19x + 9y = 100 e, consequentemente, é também solução da equação diofantina 950x + 450y = 5000.
A solução geral da equação diofantina, para o mdc(19, 9) = 1, é:

$$x = 1000 + \frac{9}{1}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad x = 1000 + 9t \geq 0$$
$$x = -2100 + \frac{19}{1}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad y = -2100 - 19t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$\mathbf{t \geq -111 \text{ e } t \leq -110}$$
$$\mathbf{-111 \leq t \leq -110}$$

Portanto, t = –111, –110. Substituindo *t* nas equações acima, obtém–se 2 soluções: x = 1 e y = 9 e a outra: x = 10 e y = –10 (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para achar o valor de z, basta substituir x = 1 e y = 9 na equação (1), e obtém-se: z = 90.

Portanto, o filho deve comprar com os R$10.000,00: 1 touro, 9 vacas e 90 garrotes.

05) O consumo de 5 refrigerantes, 10 fatias de tortas e 6 sanduiches para um grupo de estudantes totalizou R$ 48,00. Outro grupo consumiu 8 refrigerantes, 6 fatias de torta e 11 sanduiches ao preço de R$ 37,00. Quanto custa cada um dos produtos consumidos?

→ **Resolução:**

Sejam x, y e z, respectivamente, o preço do refrigerante, da fatia de torta e do sanduiche.

O modelo matemático é:

$$5x + 10y + 6z = 48 \quad (1)$$
$$8x + 6y + 3z = 37 \quad (2)$$

Multiplicando a primeira equação por 8 e a segunda equação por -5 temos;

$$40x + 80y + 48z = 384$$
$$-40x - 30y - 15z = -185$$
$$50y + 33z = 199 \text{ (Equação diofantinas)}$$

Como o mdc(50, 33) = 1 e 1 divide 199, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como nem 50 nem 33 dividem 199, logo, vamos usar o segundo método de Sebá.

$$2 \cdot 50 = 100 - 1 = 99 \text{ (99 é divisível por 33)}$$
$$100 - 99 = 1$$
$$50(2) + 33(-3) = 1 \text{ (3)}$$

Multiplicando ambos os membros da equação(3) por 199, obtém-se:

$$50(398) + 33(-597) = 199$$

Portanto, $y_0 = 398$ e $z_0 = -597$ é uma solução particular da equação diofantina $50y + 33z = 199$

A solução geral da equação diofantina, para o mdc(50, 33) = 1, é:

$$y = 398 + \frac{33}{1}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad y = 398 + 33t \geq 0$$

$$z = -597 - \frac{50}{1}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad z = -597 - 50t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$t \geq -12 \text{ e } t \leq -11$$
$$-12 \leq t \leq -11$$

Portanto, t = –12, –11. Substituindo *t* nas equações acima, obtém–se 2 soluções: y = 2 e z = 3 e a outra: y = 35 e y = –47 (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para achar o valor de x, basta substituir y = 2 e z = 3 na equação (1), e obtém-se: x = 2.

O preço de cada um dos produtos consumidos é:

Refrigerante:	R$ 2,00
Fatia de torta:	R$ 2,00
Sanduiche:	R$ 3,00

06) Se um trabalhador recebe R$510,00 em tíquetes de alimentação, com valores de R$20,00 ou R$50,00 cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador?

→ **Resolução:**

Sejam x e y o número de tíquetes alimentação de R$20,00 e de R$50,00, respectivamente.

Modelando a equação temos: 20x + 50y = 510 ou 2x + 5y = 51. Como o mdc(5,2) = 1 e como 1 divide 51, logo, a equação diofantina tem solução. De acordo com o segundo método de Sebá, temos:

$$2 \cdot 2 = 4 - 1 = 3$$
$$3 \cdot 2 = 6 - 1 = 5 \text{ (Como 5 é múltiplo de 5, pode–se parar)}$$
$$6 - 5 = 1$$

$$2(3) + 5(-1) = 1. \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por 51, obtém–se:

$$2(3 \cdot 51) + 5(-1 \cdot 51) = 1 \cdot 51$$
$$2(153) + 5(-51) = 51$$

Portanto x = 153 e y = –51 é uma solução particular da equação 2x + 5y = 51.

A solução geral da equação diofantina, para o mdc(2, 1) = 1, é:

$$x = 153 + \frac{5}{1}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad x = 153 + 5t \geq 0$$

$$x = -51 - \frac{2}{1}t \geq 0 \quad \textbf{ou} \quad x = -\,51 - 2t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$t \geq -\,30 \text{ e } t \leq -\,26$$
$$-\,30 \leq t \leq -\,25$$

Portanto, para t = – 30, – 29, – 28, – 27, – 26, temos cinco soluções para valores de *x* e *y* inteiros e positivos para o problema, conforme tabela abaixo.

t	*x*	*y*
–30	3	9
–29	8	7
–28	13	5
–27	18	3
–26	23	1

De acordo com o quadro acima, temos as seguintes soluções:
Um carnê com 3 tíquetes de R$20,00 e 9 tíquetes de R$50,00
Um carnê com 8 tíquetes de R$20,00 e 7 tíquetes de R$50,00
Um carnê com 13 tíquetes de R$20,00 e 5 tíquetes de R$50,00
Um carnê com 18 tíquetes de R$20,00 e 3 tíquetes de R$50,00
Um carnê com 23 tíquetes de R$20,00 e 1 tíquete de R$50,00.

07) Pedro multiplicou o dia e o mês de seu aniversário por 12 e 31, respectivamente. Em seguida, ele somou os resultados obtendo 153. Qual é o dia e o mês do aniversário de Pedro?

→ **Resolução:**

$$12x + 31y = 153$$
$$x = \text{dia do aniversário}$$
$$y = \text{mês do aniversário}$$
$$156 - 155 = 1$$
$$12(13) + 31(-5) = 1 \qquad (1)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por 153, obtém-se:

$$12(13 \cdot 153) + 31(-5 \cdot 153 = 153$$
$$x\mathbf{0} = 13 \cdot 153 \quad \text{e} \quad y\mathbf{0} = -5 \cdot 153$$
$$x = 13 \cdot 153 + 31t > 0 \quad \text{ou} \quad x = 13c + 31t > 0$$
$$y = -5 \cdot 153 - 12t > 0 \quad \text{ou} \quad y = -5c - 12t > 0$$
$$-\frac{13c}{31} < t < -\frac{5c}{12} \qquad (3)$$

√Exemplo

Você que está fazendo o truque substitui 153 na (3) e obtém:

$$-\frac{\mathbf{13 \cdot 153}}{\mathbf{31}} \leq \boldsymbol{t} \leq -\frac{\mathbf{5 \cdot 153}}{\mathbf{12}}$$

Escolhe-se o menor valor para t.

$$-64 \leq t \leq -63,\ t = -64$$
$$x = 13 \cdot 153 + 31(-64) = 5 \text{ (dia)}$$
$$y = -5 \cdot 153 - 12(-64) = 3 \text{ (março)}$$

Resposta: o dia e o mês do aniversário de Pedro foi no dia 5 de março.

08) Numa escola há 80 alunos que praticam basquete e vôlei. O diretor dessa escola deseja saber, quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que os 80 alunos joguem simultaneamente qualquer um dos esportes?

→ **Resolução:**

As equipes de basquete e vôlei são compostas, respectivamente, de 5 e 6 jogadores. Como é preciso de duas equipes por quadra, modelamos nosso problema através da seguinte equação diofantina:

$$12x + 10y = 80$$

Onde x e y representam, respectivamente, a quantidade de quadras de vôlei e basquete necessárias para acomodar os 80 jogadores. Como o mdc(12, 10) = 2 e 2 divide 80, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Além da aplicação do máximo divisor comum na resolução de equação diofantina linear, existem outras situações-problemas nas quais a aplicação do máximo divisor comum é indispensável. É o que veremos na Parte IV.

PARTE III

A VIDA DE DIOFANTO

A história conservou poucos traços biográficos de Diofanto, notável matemático grego da antiguidade. Tudo o que a respeito dele se conhece foi extraído do epitáfio que figura em seu sepulcro, inscrição essa composta sob a forma de um exercício matemático. Reproduzimo-la:

No nosso idiomano idioma da álgebra

Caminhante! Aqui foram sepultados os restos............................... **x**
Mortais de Diofanto. E os números podem, ó milagre!,
Revelar quão dilatada foi sua vida,
Cuja sexta parte constituiu sua linda infância .... $\frac{x}{6}$

Trancorrerá uma duodécima parte de sua vida .... $\frac{x}{12}$

Quando seu queixo se cobriu de penugem.
A sétima parte de sua existência .... $\frac{x}{7}$

Transcorreu num matrimônio estéril.
Passado um quinquênio, fê-lo feliz o nascimento........................... 5
De seu precioso primogênito, o qual entregou seu corpo, sua formosa existência, que durou

Apenas a metade da de seu pai, na Terra .... $\frac{x}{2}$

E com dor profunda desceu à sepultura, tendo sobrevivido quatro anos.. 4
Ao falecimento de seu filho.
Diz-me: quantos anos viveu Diofanto, quando lhe sobreveio a morte?

→ **Resolução:**

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

Tirando o valor de x, obtém-se: x = 84. Conhecendo o valor de x, ficamos conhecendo os seguintes dados biográficos de Diofanto: casou-se aos 21 anos, foi pai aos 38, perdeu seu filho quando tinha 80 e morreu aos 84 anos.

PARTE IV

APLICAÇÃO DO MÁXIMO DIVISOR COMUM EM OUTRAS SITUAÇÕES DO COTIDIANO

O professor de matemática ensina ao aluno do Ensino Fundamental como achar o máximo divisor comum entre dois ou mais números, mas não mostra uma situação-problema com a qual o aluno pode se defrontar no seu dia a dia. O máximo divisor comum não é usando apenas para resolver equações diofantinas. Ele pode ser usado em outras situações-problemas. A seguir iremos apresentar várias situações-problemas resolvidas com o máximo divisor comum.

01) Uma enfermeira recebeu um lote de medicamentos com 132 comprimidos de analgésico e 156 comprimidos de antibióticos. Deverá distribuí-los em recipientes iguais, contendo, cada um, a maior quantidade possível de um único tipo de medicamento. Considerando que todos os recipientes deverão receber a mesma quantidade de medicamentos, pergunta-se: qual o número de recipientes necessários para essa distribuição?

→ **Resolução:**

Como os medicamentos devem ser distribuídos **em recipientes iguais**, contendo cada um, a **maior quantidade possível de um único tipo de medicamento**, logo, basta achar o MDC de 156 e 132. O MDC(156, 131) = 12. Logo, cada recipiente deve conter 12 comprimidos. O número de recipientes de cada tipoé dado pela divisão de 156 por 12 e de 132 por 12.

$\frac{156}{12}=13$ (Recipientes contendo cada um 12 comprimidos de antibióticos)

$\frac{132}{12}=11$ (Recipientes contendo cada um 12 comprimidos de analgésicos)

Número de recipientes: 13 + 11 = 24

02) Uma floricultura recebeu uma encomenda de rosas, cravos e margaridas. Devem ser montados ramalhetes com o mesmo número de flores e com o maior número possível de flores em cada ramalhete. Sabendo-se que a floricultura possui 150 rosas, 90 cravos e 120 margaridas, pergunta-se:

a) quantas flores devem ter cada ramalhete, se a floricultura deseja vender todas as flores?
b) quantos ramalhetes a floricultura vai vender?

→ **Resolução:**

Como os ramalhetes devem ser montados com o mesmo número de flores e com o maior número possível delas em cada ramalhete, e como não dever haver sobra de flores, o número de flores de cada ramalhete é dado pelo MDC de 150, 120 e 90.

MDC (150, 120, 90) = 30

a) Cada ramalhete deve ter 30 flores;

b) A floricultura vai vender: $\frac{150}{30} + \frac{90}{30} + \frac{120}{30} = 12$ ramalhetes

03) Você vai cercar um terreno com 325m de comprimento por 180m de largura, colocando estacas sempre à igual distância. Pergunta-se:

a) a que distância terá que colocar uma da outra?
b) quantas estacas terá que comprar?

→ **Resolução:**

O MDC (325, 180) = 5.

a) Logo, a distância entre cada estaca é de 5m
b) Como o perímetro é 2x325 + 2x180 = 1010, então, terá que comprar: $\frac{1010}{5} = 202$ estacas.

04) Dona Antônia era especialista em fazer empadas. Todas as pessoas do bairro gostavam das empadinhas que ela fazia. Certo dia dona Antônia recebeu três encomendas: dona Joana pediu 200 empadas, dona Isabel, 240 e dona Amélia, 300. Dona Antônia fez as empadas e, quando estavam prontas, ficou pensando como embrulhá-las. Ela queria que os pacotes fossem **todos iguais** e, além disso, fazer **o menor número possível de pacotes**. Pergunta-se:

a) quantas empadas dona Antônia deve colocar em cada pacote?
b) quantos pacotes dona Antônia entregará à dona Joana, quantos à dona Isabel e quantos à dona Amélia?
c) Qual o número total de pacotes que dona Antônia deve entregar?

→ **Resolução:**

Como Dona Antônia queria que os pacotes fossem **todos iguais** e, além disso, fazer **o menor número possível de pacotes**, logo, para ela fazer o menor número possível de pacotes deverá colocar o maior número de empadas em cada pacote. Sendo assim, temos que achar o MDC de 300, 240 e 200. Como o MDC(300, 240, 200) = 20, logo:

a) Dona Antônia deve colocar 20 empadas em cada pacote
b) Dona Antônia entregará:

A dona Joana: $\frac{200}{20} = 10$ pacotes

A dona Joana: $\frac{240}{20} = 12$ pacotes

A dona Joana: $\frac{300}{20} = 15$ pacotes

c) Dona Antônia deverá entregar: 10 + 12 + 15 = 37 pacotes

05) Um comerciante compra feijão de três qualidades diferentes. A primeira qualidade vem em sacos de 60kg; a segunda em sacos de 72kg e a terceira em sacos de 42kg. Para vendê-los em sacos de igual peso, sem misturar qualidade, qual o peso máximo de cada saco, a fim de que não sobre feijão de nenhuma qualidade?

→ **Resolução:**
Como o comerciante quer vender o feijão em sacos de igual peso, sem misturar qualidade, o peso máximo de cada saco, a fim de que não sobre feijão de nenhuma qualidade, é dado pelo MDC de 72, 60 e 42. Como MDC(72, 60, 42) = 6, logo, o peso máximo de cada saco deve ser de 6 quilos.

06) Num colégio matriculam-se na 8ª série, 88 meninas e 110 meninos. Se todas as classes devem ter o mesmo número de alunos, e não há classes mistas, pergunta-se: qual o número de alunos por classe e qual o menor número de classes que o colégio deverá manter?

→ **Resolução:**
Se todas as classes devem ter o mesmo número de alunos e o menor número de classes, logo, para ter o menor número de classes, o colégio dever ter o máximo de alunos por classe. Então, basta achar o MDC de 110 e 88. O MDC(110, 88) = 22 alunos por classe. Para saber o número de classes,basta dividir:

$\frac{110}{22}$= classes com 22 meninos cada uma.

$\frac{88}{22}$= 4 classes com 22 meninas cada uma.

Total de classes: 5 + 4 = 9

07) Sempre que uma pessoa anda 650cm, 800cm e 1000cm, ela dá um número exato de passos. Qual é o maior comprimento possível de cada passo dado por essa pessoa?

→ **Resolução:**
O MDC(650, 800, 1000) = 50. Logo, o maior comprimento de cada passo pela pessoa é de 50cm.

08) Dona Maria, costureira do bairro, dispõe de duas fitas de tamanhos diferentes. Com uma das mãos, ela mediu as fitas: a primeira tinha 24 palmos e a segunda, 32 palmos. Ela pretende cortar as duas fitas de modo a obter pedaços do mesmo tamanho e que seja o maior possível. Quanto medirá cada fita?

→ **Resolução:**
Como Dona Maria pretende obter pedaços do mesmo tamanho e que seja o maior possível, logo, basta achar o MDC de 32 e 24. MDC(32, 23) = 8. Já que o MDC de 32 e 24 é 8, então, cada fita medirá 8 palmos.

09) Um marceneiro dispõe de 3 tábuas com as seguintes medidas: a primeira com 12m, a segunda com 15m e a terceira com 18m. Ele pretende cortá-las todas em pedaços iguais, e que tenham o maior comprimento possível. Pergunta-se: quatos metros medirá cada tábua?

→ **Resolução:**
Como o marceneiro pretende obter pedaços do mesmo tamanho e que seja o maior possível, logo, basta achar o MDC de 18, 15 e 12. MDC(18, 15, 12) = 3. Já que o MDC de18, 15 e 12 é 3, então, cada tábua medirá 3 metros.

10) Um outro marceneiro possui duas ripas de madeira: uma com 4m e a outra com 6m. Ele deseja serrá-las em partes iguais de modo a obter o maior comprimento possível. Pergunta-se: qual será esse comprimento?

→ **Resolução:**

Como o marceneiro pretende serrar as ripas em partes iguais de modo a obter o maior comprimento possível, logo, basta achar o MDC de 6 e 4. MDC(6, 4) = 2. Já que o MDC de 6 e 4 é 2, então, cada ripa terá um comprimento de 2m.

11) Um terreno de forma retangular tem as seguintes dimensões, 24 metros de frente e 56 metros de fundo. Qual deve ser o maior comprimento de uma corda que sirva para medir exatamente as duas dimensões?

→ **Resolução:**

Como se deseja o maior comprimento, logo, basta achar o MDC de 56 e 24. Já que o MDC(56, 24) = 8, logo, a maior corda deve ter o comprimento de 8m.

12) Uma indústria de tecidos fabrica retalhos de mesmo comprimento. Após realizarem os cortes *necessários*, verificou-se que duas peças restantes tinham as seguintes medidas: 156 centímetros e 234 centímetros. O gerente de produção ao ser informado das medidas, deu a ordem para que o funcionário cortasse o pano em partes iguais e de maior comprimento possível. Como ele poderá resolver essa situação?

→ **Resolução:**

Devemos encontrar o MDC entre 156 e 234; esse valor corresponderá à medida do comprimento desejado.

MDC (156, 234) = 78

Portanto, os retalhos devem ter 78 cm de comprimento.

13) Uma empresa de logística é composta de três áreas: administrativa, operacional e vendedores. A área administrativa é composta de 30 funcionários, a operacional de 48 e a de vendedores com 36 pessoas. Ao final do ano, a empresa realiza uma integração entre as três áreas, de modo que todos os funcionários participem ativamente. As equipes devem conter o mesmo número de funcionários com o maior número possível. Determine quantos funcionários devem participar de cada equipe e o número possível de equipes.

→ **Resolução:**

Como as equipes devem conter o mesmo número de funcionários com o maior número possível, logo, basta achar o MDC de 48, 36 e 30. Como o MDC(48, 36, 30) = 6. $\frac{30}{6} = 5$ o número possível de equipe: 8 + 6 + 5 = 19. Portanto, devem participar 6 funcionários em cada equipe. Já que:

$$\frac{48}{6} = 8, \quad \frac{36}{6} = 6 \text{ e } \frac{30}{6} = 5.$$

14) Um serralheiro deseja cortar um paralelepípedo de 27cm x 45cm x 60cm, dividindo este paralelepípedo em vários cubos de arestas de mesma medida. Qual é a maior medida que a aresta desses cubos pode ter?

→ **Resolução:**

Como o serralheiro quer dividir o paralelepípedo em vários cubos com arestas demesma medida, be a maior possível, logo, basta achar o MDC de 27, 45 e 60. Já que o MDC(60, 45, 27) = 3. Logo, a aresta de maior medida possível de ter 3cm.

15) No almoxarifado de certa empresa havia dois tipos de canetas esferográficas: 224 com tinta azul e 160 com tinta vermelha. Um funcionário foi incumbido de empacotar todas essas canetas de modo que cada pacote contivesse apenas canetas com tinta de uma mesma cor. Se todos os pacotes deviam conter igual número de canetas, pergunta-se: qual a menor quantidade de pacotes que ele poderia obter?

→ **Resolução:**

Se todos os pacotes deviam conter igual número de canetas e, além disso, a menor quantidade de pacotes, logo, o número de pacotes deve ser o maior possível. Nesse caso, deve-se achar o MDC de 224 e 160. O MDC(224, 160) = 32. Como o MDC de 224 e 160 é 32, logo, é 32 a menor quantidade de pacotes.

16) Lúcia fez 36 litros de refresco de uva e 42 litros de refresco de caju. Ela terá de colocá-los em garrafões do mesmo tamanho sem sobrar refresco algum e sem misturar os refrescos. Ela quer comprar os maiores garrafões possíveis. Pergunta-se: de quantos litros deve ser a capacidade desses garrafões e quantos garrafões Lúcia deve comprar?

→ **Resolução:**

A solução do problema se obtém por meio do MMC ou do MDC? Já que o problema exige os maiores garrafões possíveis, logo, por meio do MDC. Como o MDC(42, 36) = 6, logo, cada garrafão deve ter a capacidade de 6 litros.

$$\frac{42}{6} = 7 \text{ garrafões de 6 litros}$$

$$\frac{36}{6} = 6 \text{ garrafões de 6 litros}$$

Como 7 + 6 = 13, logo, Lúcia deve comprar 13 garrafões.

17) Para arborizar um terreno retangular, cujas dimensões são 15 e 20 metros, deseja-se plantar árvores, com o mesmo espaçamento e com o menor número de árvores possível. Pergunta-se:

a) qual deve ser a distância entre as árvores?
b) quantas árvores no máximo serão necessárias?

→ **Resolução:**

Como o plantio de árvores deve ter o mesmo espaçamento e com o menor número de árvores possível, logo, o espaçamento deve ser o maior possível, a fim de que o número de árvores seja o menor possível. Então, basta achar o MDCde 20 e 15. Comoo MDC(20, 15) = 5, logo:

a) Espaçamento: 5 metros.
b) 20 árvores

18) Entre algumas famílias de um bairro, foi distribuído um total de 144 cadernos, 192 lápise 216 borrachas. Essa distribuição foi feita de modo que o maior número possível de famílias fosse contemplado e todas recebessem o mesmo número de cadernos, o mesmo número de lápis e o mesmo número de borrachas, sem haver sobra de qualquer material. Pergunta-se:

a) Qual o número de famílias?
b) Quantos cadernos cada família ganhou?

→ **Resolução:**

Como a distribuição foi feita de modo que o maior número possível de famílias fosse contempladoe, além disso, todas as famílias recebessem o mesmo número de cadernos, lápis e borrachas, logo, basta achar o MDC entre os número 216, 192 e 144. Já que o MDC(216, 192, 144) = 24, logo,

a) 24 é o número de famílias.
b) $\frac{144}{24}$= 6 cadernos cada família ganhou

19) Dois terrenos de $21600m^2$ e $16800m^2$ são loteados em lotes iguais com a maior área possível e sem perda de terreno. Qual o número de lotes obtido?

→ **Resolução:**

Como os terrenos devem ser loteados em lotes iguais e com a maior área, logo, basta achar o MDC entre as áreas. Já que o MDC(21600, 16800) = 2400, logo:

$$\frac{21600}{2400} = 9$$

$$\frac{16800}{2400} = 7$$

Número de lotes obtidos: 9 + 7 = 16

20) Três fios têm comprimentos de 36m, 48m e 72m. Deseja-se cortá-los em pedaços menores, cujos comprimentos sejam iguais, expressos em número inteiro de metros e sem que haja perda de material. Qual o menor número total de pedaços?

→ **Resolução:**

Como se deseja obter o menor número total de pedaços, logo, deve-se cortar os comprimentos 36m, 48m e 72m em pedaços os maiores possíveis. Se é assim, logo, basta achar o MDC entre os números 36, 48 e 72. Já que o MDC(72, 48, 36) = 12, logo:

$$\frac{72}{12} = 6$$

$$\frac{48}{12} = 4$$

$$\frac{36}{12} = 3$$

O menor número total de pedaços é: 6 + 4 + 3 = 13 pedaços

21) José possui um supermercado e pretende organizar de 100 a 150 detergentes,na prateleira de produtos de limpeza, agrupando -os de 12 em 12, de 15 em 15 ou de 20 em 20, mas sempre restando um. Quantos detergentes José tem em seu supermercado?

→ **Resolução:**

Se José arruma os detergentes em grupos de múltiplos de 12, 15 ou 20, e sobra 1, vamos então encontrar o mínimo múltiplo comum entre esses números. Vejamos:

O MMC (12, 15, 20) = 60

Os múltiplos de 60 serão também múltiplos comuns a 12, 15 e 20. Vejamos os múltiplos de 60:M(60) = {0, 60, 120, 180, 240, ...}

Você pode observar que o único dos múltiplos de 60 que se encaixa na quantidade de detergentes do supermercado de José é o 120. Mas falta ainda acrescentarmos aquele detergente que sempre restava, portanto, podemos concluir que no supermercado de José havia **121 detergentes.**

PARTE V

PROBLEMAS PROPOSTOS

01. Dispomos de 7 varas de ferro de 6 m de comprimento; 12 varas de ferro de 9,6 m de comprimento e 13 varas de ferro de 12 m de comprimento. Desejando-se fabricar vigotas para laje pré-moldada, deve-se cortar as varas em "pedaços" de mesmo tamanho e maior possível, sabendo também que para a construção de cada vigota são necessários 3 "pedaços" . Nessas condições, quantas vigotas obteríamos?

02. Um auxiliar de enfermagem pretende usar a menor quantidade possível de gavetas para acomodar 120 frascos de um tipo de medicamento, 150 frascos de outro tipo e 225 frascos de um terceiro tipo. Se ele colocar a mesma quantidade de frascos em todas as gavetas, e medicamentos de um único tipo em cada uma delas, quantas gavetas deverá usar;

03. Três peças de tecidos com as seguintes cores: azul, branca e preta; a peça azul tem 375m de comprimento, a branca, 525m e a preta, 675m.Deseja-se cortar as três peças em pedaços iguais, e cada pedaço com o maior comprimento possível. Qual o maior tamanho de cada pedaço e quantos serão os pedaços?

04. Uma faixa retangular de tecido deverá ser totalmente recortada em quadrados, todos de mesmo tamanho, e sem deixar sobras. Esses quadrados deverão ter a maior área possível. Se as dimensões da faixa são 105cm de largura por 700cm de comprimento, qual o perímetro de cada quadrado, em centímetros?

PARTE VI

RESPOSTAS AOS PROBLEMAS PROPOSTOS

01. Primeiro precisamos saber esse tamanho máximo de cada pedaço de ferro.

Como na questão anterior, vamos utilizar o MDC, pois temos que cortar (dividir) em mesmo tamanho e maior possível.

Mas antes observe que temos uma medida em valor decimal, 9,6m. Vamos, portanto, converter esta medida e as demais para decímetro, assim teremos todos os números inteiros, pois aprendemos a calcular o MDC somente de números inteiros positivos.

$$9{,}6m = 96dm;\ 6m = 60dm;\ 12m = 120dm.$$

Logo, MDC(60,96,120) = 12

Cada pedaço de vara deverá medir 12dm = 1,2m.

Agora, determinaremos o total de pedaços.

Para a medida de 6m, teremos $\frac{6}{1{,}2} = 5$ pedaços

Para a medida de 9,6m, teremos $\frac{9{,}6}{1{,}2} = 8$ pedaços

Para a medida de 12m, teremos $\frac{12}{1{,}2} = 10$ pedaços

Mas, devemos lembrar que temos 7 varas de 6m, 12 varas de 9,6m e 13 varas de 12m, portanto o total de pedaços será de: $7 \cdot 5 + 12 \cdot 8 + 13 \cdot 10 = 261$.

Como para a construção de cada vigota temos que usar três pedaços de ferro, poderemos construir $\frac{261}{3} = 87$ vigotas.

02. Observe que o auxiliar deseja usar a menor quantidade de gavetas possível, neste caso ele deve colocar a maior quantidade possível de frascos nas gavetas, certo? Mas, também terá que ser na mesma quantidade para todas as gavetas, veja que novamente o conceito de MDC entra na resolução deste problema.

Ao pensar em usar a menor quantidade de gavetas possível, tem-se que colocar a maior quantidade de frascos e que ainda seja na mesma quantidade em cada gaveta!

Como o MDC(150, 225) = 15, logo, calculando a quantidade de gavetas, obtém-se:

$$\frac{120}{15} = 8 \qquad \frac{150}{15} = 10 \qquad \frac{225}{15} = 15$$

Para o medicamento com 120 frascos será necessário 8 gavetas; para o medicamento com 150 frascos, 10 gavetas e para o terceiro tipo com 225 frascos, 15 gavetas.

03. Como o MDC(375, 525, 675) = 75, logo, para cortar as três peças em pedaços iguais e com o maior comprimento possível, cada pedaço deverá ter 75m de comprimento. Da peça de tecido de cor azul, obtém-se 5 pedaços $\left(\frac{375}{75}\right)$, da peça de tecido de cor branca, 7 pedaços $\left(\frac{525}{75}\right)$ e da peça de tecido de cor preta, 9 pedaços $\left(\frac{675}{75}\right)$. Portanto, os pedaços serão em número de: 5 + 7 + 9 = 21.

04) Se a faixa de tecido deverá ser recortada sem deixar sobras, logo, a medida do lado do quadrado deve dividir 105cm e 700cm sem deixar resto. Como os quadrados deverão ter a maior área possível, então, basta achar o MDC de 700 e 105. Como o MDC(700, 105) = 35, logo, o lado do quadrado deve ter 35cm. O perímetro do quadrado é dado por: 4*35cm = 140cm.

PARTE VII

TERNOS PITAGÓRICOS VERSUS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS

Para saber usar o teorema de Pitágoras na redução dos custos em atividades do cotidiano, é necessário que antes o leitor aprenda como encontrar os três lados de um triângulo retângulo dada apenas a medida do cateto menor.

Definições:

1. Diz-se que (a, b, c) é um terno pitagórico ou as medidas dos lados de um triângulo pitagórico, se a, b e c são números inteiros e, além disso, satisfazer a equação $a^2 + b^2 = c^2$ (Teorema de Pitágoras).

2. Existem dois tipos de ternos pitagóricos:
a) terno pitagórico primitivo, quando o máximo divisor comum de a e b é igual à unidade ou MDC(a,b) = 1.
b) terno pitagórico não primitivo, quando o MDC (a, b) > 1.

3. Consequentemente, existem dois tipos de triângulos pitagóricos:
a) triângulo pitagórico primitivo, quando o máximo divisor comum das medidas dos catetos (a e b) é igual à unidade ou MDC (a,b) = 1.
b) triângulo pitagórico não primitivo, quando o máximo divisor comum das medidas dos catetos (a e b) é maior que a unidade ou MDC (a,b) > 1.

4. Todo triângulo pitagórico é triângulo retângulo, mas nem todo triângulo retângulo é triângulo pitagórico.

Se $a < b < c$ for um terno pitagórico, então:

a) existe apenas um terno pitagórico se "a" for um primo ímpar (p) e, além disso, c e b são dados, respectivamente, por:

$$c = \frac{p^2 + 1}{2} \text{ e } b = c - 1$$

Observação: $p < b < c$ ou $b < p < c$ é um terno pitagórico, se p, b e c forem inteiros e, além disso, $p^2 + b^2 = c^2$. Quando $p < b < c$, então, além de p, b, c ser um terno pitagórico, p, b e c são, respectivamente, cateto menor, cateto maior e hipotenusa de um triângulo pitagórico. Portanto, ternos pitagóricos são três números naturais com $p < b < c$ ou $b < p < c$ e, além disso, satisfazem: $p^2 + b^2 = c^2$. Um triângulo retângulo é dito pitagórico se $p < b < c$ são números naturais e, além disso, $p^2 + b^2 = c^2$.

√Exemplo

Se p = 5, temos:

$$c = \frac{p^2 + 1}{2} = \frac{5^2 + 1}{2} = 13 \text{ e } b = c - 1 = 13 - 1 = 12$$

Verificação: como $p^2 + b^2 = c^2$, logo, $5^2 + 12^2 = 13^2$

Como $p < b < c$, então, além de (5, 12, 13) ser um terno pitagórico, 5, 12 e 13 são também as medidas dos lados de um triângulo pitagórico.

b) existe apenas um terno pitagórico se "a" for um par da forma 2p (onde p é um primo ímpar) e, além disso, c e b são dados, respectivamente, por:

$$c = \frac{a^2}{4} + 1 \text{ e } b = c - 2.$$

√Exemplo

Se a = 10 = 2p = 2x5, então:

$$c = \frac{a^2}{4} + 1 = \frac{10^2}{4} + 1 \quad \text{e} \quad b = c - 2 = 26 - 2 = 24$$

Verificação: como $a^2 + b^2 = c^2$, logo, $10^2 + 24^2 = 26^2$

Como a < b < c, então, além de (10, 24, 26) ser um terno pitagórico, 10, 24 e 26 são também as medidas dos lados de um triângulo pitagórico.

c) Se "a" for um par diferente de 2*p*, o número de ternos pitagóricos é igual ao número de divisores pares de a^2, menores que "**a**", que dividem $\frac{a^2}{2k}$ e, além disso, c e b são dados por:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} \text{ e } b = c - k$$

Na qual: k = número de divisores de a^2 menores que a.

√Exemplo

Seja **a** = 8. Como $8^2 = 64$ e, além disso, os divisores pares de 64 menores que 8 são 2 e 4, logo, k = 2 e 4. $\frac{64}{4} = 16$ e $\frac{64}{8} = 8$. Portanto, existem dois ternos pitagóricos com a = 8. Com k = 2 e 4, vamos encontrar os dois ternos pitagóricos:

Para k = 2, obtém-se:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{8^2 + 2^2}{2 \cdot 2} = 17 \text{ e } b = c - k = 17 - 2 = 15$$

Verificação: como $a^2 + b^2 = c^2$, logo, $8^2 + 15^2 = 17^2$

Como $a < b < c$, então, além de (8, 15, 17) ser um terno pitagórico, 8, 15 e 17 são, respectivamente, cateto menor, cateto maior e hipotenusa de um triângulo pitagórico.

Para $k = 4$, obtém-se:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{8^2 + 4^2}{2 \cdot 4} = 10 \text{ e } b = c - k = 10 - 4 = 6$$

Verificação: como $b^2 + a^2 = c^2$, logo, $8^2 + 6^2 = 10^2$

Como $b < a < c$, então, (8, 6, 10) é um terno pitagórico, só que 8 e 6 são, respectivamente, cateto maior e cateto menor de um triângulo pitagórico.

Conclusão:

Se $a = 8$, existem dois ternos pitagóricos, (8, 6, 10) e (8, 15, 17), mas somente um triângulo pitagórico (8, 15, 17) com cateto menor igual a 8.

d) se "a" for um ímpar composto, o número de ternos pitagóricos é igual ao número de divisores de a^2 menores que "**a**" que dividem $\frac{a^2}{k}$ e, além disso, c e b são dados, respectivamente, por:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} \text{ e } b = c - k$$

Na qual: k = número de divisores de a menores que a.

√Exemplo

Seja a = 15. Como $15^2 = 225$ e, além disso, os divisores de 225 menores que 15 são 1, 3, 5 e 9, logo, k = 1, 3, 5 e 9. $\frac{225}{1} = 225$, $\frac{225}{3} = 75$, $\frac{225}{5} = 45$ e $\frac{225}{9} = 25$, Portanto, existem quatro ternos pitagóricos com a = 15. Com k = 1, 3, 5 e 9, vamos encontrar os quatro ternos pitagóricos:

Para k = 1, obtém-se:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{15^2 + 1^2}{2 \cdot 1} = 113 \text{ e } b = c - k = 113 - 1 = 117$$

Verificação: Como $a^2 + b^2 = c^2$, logo, $15^2 + 112^2 = 113^2$

Como a < b < c, então, além de (15, 112, 113) ser um terno pitagórico, 15, 112 e 113 são, respectivamente, cateto menor, cateto maior e hipotenusa de um triângulo pitagórico.

Para k = 3, obtém-se:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{15^2 + 3^2}{2 \cdot 3} = 39 \text{ e } b = c - k = 39 - 3 = 36$$

Verificação: Como $a^2 + b^2 = c^2$, logo, $15^2 + 36^2 = 39^2$

Como a < b < c, então, além de (15, 36, 39) ser um terno pitagórico, 15, 36 e 39 são, respectivamente, cateto menor, cateto maior e hipotenusa de um triângulo pitagórico.

Para k = 5, obtém-se:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{15^2 + 5^2}{2 \cdot 5} = 25 \text{ e } b = c - k = 25 - 5 = 20$$

Verificação: Como $a^2 + b^2 = c^2$, logo, $15^2 + 20^2 = 25^2$

Como a < b < c, então, além de (15, 20, 25) ser um terno pitagórico, 15, 20 e 25 são, respectivamente, cateto menor, cateto maior e hipotenusa de um triângulo pitagórico.

Para k = 9, obtém-se:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{15^2 + 9^2}{2 \cdot 9} = 17 \text{ e } b = c - k = 17 - 9 = 8$$

Verificação: Como $a^2 + b^2 = c^2$, logo, $15^2 + 8^2 = 17^2$

O trio (15, 8, 17) é um terno pitagórico, mas 15 e 8 são, respectivamente, cateto maior e cateto menor de um triângulo pitagórico.

√Exemplos

O terno pitagórico (6, 8, 10) não é primitivo, porque tem o 2 como fator comum aos três elementos, ou seja, MDC(a, b) = 6, 8) = 2.

O terno pitagórico (9, 12, 15) não é primitivo porque tem o 3 como fator comum aos três elementos.

Conclusão:

Se a = 15, existem 4 ternos pitagóricos com "a" igual a 15: (15, 112, 113), (15, 36, 39), (15, 20, 25) e (15, 8, 17), sendo dois ternos pitagóricos primitivos (15, 112, 113) e (15, 8, 17) e dois ternos pitagóricos não primitivos: (15, 36, 39) e (15, 20, 25),mas apenas 3 triângulos pitagóricos: (15, 112, 113), (15, 36, 39), (15, 20, 25) cada um com cateto menor igual a 15.

Se **a** for um número natural no intervalo $2 < \mathbf{a} < \infty$, as quatro fórmulas geram todos os ternos pitagóricos (primitivos e não primitivos) e em sequência.

PARTE VIII

DEMONSTRAÇÕES DAS FÓRMULAS QUE GERAM TERNOS PITAGÓRICOS

TEOREMA SEBÁ 1 - Se a, b e c forem naturais, a equação $a^2 + b^2 = c^2$:

a) tem apenas uma solução se a (cateto menor) for um primo ímpar;
b) tem apenas uma solução se a for um par da forma $2p$ (onde p é um primo ímpar);
c) se a for um par diferente de $2p$, o número de soluções é igual ao número de divisores pares (k) de a^2 menores que a;
d) se a for um ímpar composto, o número de soluções é igual ao número de divisores (k) de a^2 menores que a;

Demonstração:

a) A equação $a^2 + b^2 = c^2$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$c + b = \frac{a^2}{c - b} \quad (1)$$

Uma vez que c e b são naturais, logo, $c - b$ tem que dividir a^2 sem deixar resto. Logo, $c - b$ é divisor positivo de a^2. Como a é um primo ímpar, os divisores de a^2 são: a^2, a e 1. Substituindo na igualdade (1) $c - b$ por a^2, a e 1, respectivamente, obtêm-se os seguintes sistemas de equações:

$$S_1\begin{cases} c - b = a^2 \\ c + b = 1 \end{cases} \qquad S_2\begin{cases} c - b = a \\ c + b = a \end{cases} \qquad S_3\begin{cases} c - b = 1 \\ c + b = a^2 \end{cases}$$

Dos três sistemas de equações acima, somente o S_3 é compatível. Resolvendo-o , obtém-se:

$c = \dfrac{a^2 + 1}{2}$ $e\ b = c - 1$ (Ficando Assim Demonstrado ou F.A.D.

√Exemplos

1) Quantos ternos pitagóricos existem com a = 3?

→ **Resolução:**

Já que 3 é primo, logo, os divisores de 3 são: 1 e 3. Como k é menor do que a^2, logo, k = 1.

$$\text{Se } a = 3 \text{ e } k = 1\text{, então, } c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{3^2 + 1^2}{2x1} = 5 \text{ e } b = c - 1 = 5 - 1 = 4$$

Resposta: Se a = 3 só existe um terno pitagórico: (a, b, c) = (3, 4, 5).

2) Quantos ternos pitagóricos existem com a = 5?

→ **Resolução:**

Já que 5 é primo, logo, os divisores de 5 são: 1 e 5. Como k é menor do que a^2, logo, k = 1.

$$\text{Se } a = 5 \text{ e } k = 1\text{, então, } c = \frac{5^2 + 1^2}{2x1} = 13 \text{ e } b = c - 1 = 13 - 1 = 12$$

Resposta: Se a = 5 só existe um terno pitagórico: (a, b, c) = (5, 12, 13).

E assim por diante.

b) Substituindo [na igualdade (1) da letra "a"], a por 2p, obtém-se: $c + b = \frac{4^2}{c - b}$. Já que c e b são inteiros, c – b tem que dividir $4p^2$ sem deixar resto. Logo, c – b é dividor positivo de $4p^2$.

Como 2p é par, logo, o número de soluções é igual ao número de divisores pares de $4p^2$ menores que 4p. Os divisores pares de $4p^2$ menores que 4p são: 2 e 4. Substituindo 2 e 4 por

c – b, em $c + b = \frac{4p^2}{c - b}$, obtêm-se os seguintes sistemas de equações:

$$S_1 \begin{cases} c - b = 2 \\ c + b = 2p^2 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} c - b = 4 \\ c + b = p^2 \end{cases}$$

Já que **c** é inteiro, dos dois sistemas de equações acima somente o S_1 é compatível.

Resolvendo S_1, obtém-se: $c = p^2 + 1$ (3)

Como a = 2p, logo, $p = \frac{a}{2}$. Substituindo na (3), p por $\frac{a}{2}$, obtém-se: $c = \frac{a^2}{4} + 1$ e b = c – 2(F.A.D. ou Ficando Assim Demonstrado

√Exemplos

1) Quantos ternos pitagóricos existem com a = 6?

→ **Resolução:**

Já que "a" é um composto da forma 2p = 2x3, logo:

$$c = \frac{6^2}{4} + 1 = 10 \quad \text{e} \quad b = c - 2 = 10 - 2 = 8$$

Resposta: Se a = 6 só existe um terno pitagórico: (a, b, c) = (6, 8, 10).

2) Quantos ternos pitagóricos existem com a = 10?

→ **Resolução:**
Já que "a" é um composto da forma 2p = 2x5, logo:

$$c = \frac{10^2}{4} + 1 = 26 \quad \text{e} \quad b = c - 2 = 26 - 2 = 24$$

Resposta: Se a = 10 só existe um terno pitagórico: (a, b, c) = (10, 24, 26).
E assim por diante.

c) Seja c – b = k o divisor positivo de a^2. Substituindo [na igualdade(1) da letra **a]**, c – b por k, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} c - b = k \\ c + b = \dfrac{a^2}{k} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obtém-se a seguinte solução:

$$2c = k + \frac{a^2}{k} \text{ ou } c = \frac{a^2 + k^2}{2k}$$

Como c – b = k, logo, b = c – k.

Como 2c e k são sempre pares, a fim de que c seja inteiro, $\dfrac{a^2}{k}$ têm que ser par. Quando c não for inteiro é porque 2k não divide a^2. Como 2k e a^2 são pares e, além disso, k é divisor positivo de a^2, se incluirmos os divisores ímpares de a^2, a soma $a^2 + k^2$ vai ser ímpar, e, consequentemente, $a^2 + k^2$ dividido por 2k vai ser fracionário. Foi por isso que consideramos somente os divisores pares de a^2.

Se k = a, então, $c = \dfrac{a^2 + a^2}{2a} = a$. Como b = c – k , então, b = a – a = 0. Logo, os divisores pares de a^2 devem ser menores que a. Portanto, se a for par diferente de 2p, o número de soluções é igual ao número de divisores pares de a^2 menores que a e, além disso, a^2 tem que dividir 2k (F.A.D.).

√Exemplos

1) Quantos ternos pitagóricos existem com a = 12?

→ **Resolução:**

Já que 12 é um número composto diferente de 2p, logo, os divisores pares de 12^2 menores que **12** são: 2, 4, 6 e 8. Portanto, k = 2, 4, 6 e 8.

Para $k = 2$: $\dfrac{a^2 + k^2}{2k} = \dfrac{12^2 + 2^2}{2x2} = 37$ e b = c – k = 37 – 2 = 35

Terno pitagórico: (a, b, c) = (12, 35, 37).

Para $k = 4$: $\dfrac{a^2 + k^2}{2k} = \dfrac{12^2 + 4^2}{2x4} = 20$ e b = c – k = 20 – 4 = 16

Terno pitagórico: (a, b, c) = (12, 16, 20).

Para $k = 6$: $\dfrac{a^2 + k^2}{2k} = \dfrac{12^2 + 6^2}{2x6} = 15$ e b = c – k = 15 – 6 = 9

Terno pitagórico: (a, b, c) = (12, 9, 15).

Para $k = 8$: $\dfrac{a^2 + k^2}{2k} = \dfrac{12^2 + 8^2}{2x8} = 13$ e b = c – k = 13 – 8 = 5

Terno pitagórico: (a, b, c) = (12, 5, 13).

Resposta: Existem quatro ternos pitagóricos para a = 12.

2) Quantos ternos pitagóricos existem com a = 16?

→ **Resolução:**
Já que 16 é um número composto diferente de 2p, logo, os divisores pares de 16^2 menores que **16** são: 2, 4 e 8. Portanto, k = 2, 4 e 8.

Para $k = 2$: $\dfrac{16^2+2^2}{2x2} = 65$ e b = c – k = 65 – 2 = 63

Terno pitagórico: (a, b, c) = (16, 63, 65).

Para $k = 4$: $\dfrac{16^2+4^2}{2x4} = 34$ e b = c – k = 34 – 4 = 30

Terno pitagórico: (a, b, c) = (16, 30, 34).

Para $k = 8$: $\dfrac{16^2+8^2}{2x8} = 20$ e b = c – k = 20 – 8 = 12

Terno pitagórico: (a, b, c) = (16, 12, 20).

d) Pela letra **c**, já que um número ímpar composto tem apenas divisores ímpares, então, se “**a**” for ímpar, o número de soluções é igual ao número de divisores de a^2 menores que **a**(F.A.D.).

√Exemplos

1) Quantos ternos pitagóricos existem com a = 9?

→ **Resolução:**
Já que 9 é um número ímpar composto, logo, os divisores pares de 9^2 menores que **9** são: 1 e 3. Portanto, k = 1 e 3.

Para $k = 2$: $\frac{9^2 + 1^2}{2x1} = 41$ e b = c – k = 41 – 1 = 40

Terno pitagórico: (a, b, c) = (9, 40, 41).

Para $k = 3$: $\frac{9^2 + 3^2}{2x3} = 15$ e b = c – k = 15 – 3 = 12

Terno pitagórico: (a, b, c) = (9, 12, 15)

2) Quantos ternos pitagóricos existem com a = 15?

→ **Resolução:**
Já que 15 é um número ímpar composto, logo, os divisores pares de 15^2 menores que **15** são: 1, 3, 5 e 9. Portanto, k = 1, 3, 5 e 9.

Para $k = 1$: $\frac{15^2 + 1^2}{2x1} = 113$ e b = c – k = 113 – 1 = 112

Terno pitagórico: (a, b, c) = (15, 112, 113).

Para $k = 3$: $\frac{15^2 + 3^2}{2x1} = 39$ e b = c – k = 39 – 3 = 36

Terno pitagórico: (a, b, c) = (15, 36, 39).

Para $k = 5$: $\frac{15^2 + 5^2}{2x1} = 25$ e b = c – k = 25 – 5 = 20

Terno pitagórico: (a, b, c) = (15, 20, 25).

Para $k = 5$: $\frac{15^2 + 9^2}{2x9} = 17$ e b = c – k = 17 – 9 = 8

Terno pitagórico: (a, b, c) = (15, 8, 17).

PARTE IX

A QUADRATURA DO RETÂNGULO POR MEIO DOS TERNOS PITAGÓRICOS

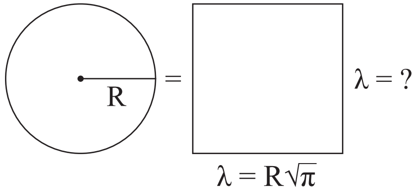
Quadrar área é um problema muito antigo. Por exemplo, a quadratura do círculo foi um problema proposto pelos antigos geômetras gregos, o qual consistia em construir um quadrado com a mesma área de um dado círculo servindo-se somente de uma régua e um compasso em um número finito de etapas.

A transcendência de π estabelece a impossibilidade de construir, somente com uma régua e um compasso, um quadrado cuja área seja rigorosamente igual à área de um determinado círculo.

Em 1882, Ferdinand Lindemann provou que π, além de ser um número irracional, é um número transcendente, isto é, não existe um polinômio com coeficientes inteiros ou racionais não todos nulos dos quais π seja uma raiz. Como resultado disso, é impossível exprimir π com um número finito de números inteiros, de frações racionais ou suas raízes.

Como os gregos desconheciam as operações algébricas e priorizavam a Geometria, propunham solução apenas com régua (sem escala) e compasso.

A solução é trivial se forem usados os recursos da álgebra. Se não, vejamos:



Cálculo de λ (lado do quadrado)

$$S_{\bigcirc} = S_{\square}$$

$$\pi R^2 = \lambda^2$$

Isolando se o λ:

$$\boxed{\lambda = R\sqrt{\pi}}$$

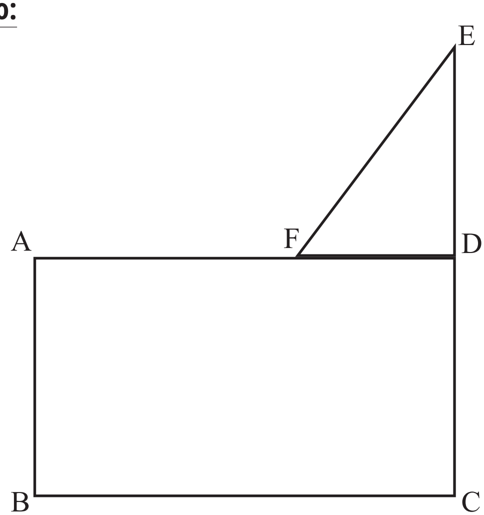
Para um círculo de raio igual a 3cm e $\pi \approx 3{,}1415926$, o lado do quadrado deve ser 5,32cm.

Deduz-se, então, que é elementar a solução por meio da Álgebra.

Flagrante da vida real

O Sr. Manoel é proprietário de n terrenos em forma retangular e deseja transformar cada um em quadrados, de tal maneira que a área de cada quadrado seja igual a área de cada retângulo e, além disso, as medidas dos lados de cada área retangular, expressas em metros, sejam números inteiros. Pergunta-se: é possível o Sr. Manoel conseguir alcançar o seu objetivo sem saber as dimensões de nenhum dos n terrenos retangulares?

→ **Resolução:**



Pela figura acima, nota-se que o triângulo DEF é retângulo, logo:
FD = Cateto menor
DE = Cateto maior (lado do quadrado)
EF = hipotenusa
AF + DF = lado maior do retângulo
AF = EF
Seja:
A_Q = Área do quadrado
A_R = Área do retângulo

Já que $A_Q = DE^2$ e $A_R = AB.BC$, logo:
$DE^2 = AB.BC$

$$AB = \frac{DE^2}{BC}$$

Dedução das fórmulas para determinar a quadratura do retângulo, dada a medida de FD, por meio dos ternos pitagóricos.

Seja (a, b, c) as medidas dos lados de um triângulo pitagórico (Triângulo retângulo com a, b e c inteiros).

Lado do quadrado: $DE = b$

Lado menor do retângulo: $AB = \frac{DE^2}{AD} = \frac{DE^2}{DF + AF} = \frac{b^2}{a + c}$

Lado maior do retângulo: $AD = DF + AF = a + c$

Na Parte VII foi demonstrado que: se $a < b < c$ for um terno pitagórico, então:

a) existe apenas um terno pitagórico se a = p for um primo ímpar e, além disso, c e b são dados, respectivamente, por:

$$c = \frac{p^2 + 1}{2} \text{ e } b = c - 1 \text{ e } b = c - 1$$

b) existe apenas um terno pitagórico se "a" for um par da forma 2p (onde p é um primo ímpar) e, além disso, c e b são dados, respectivamente, por:

$$c = \frac{a^2}{4} + 1 \text{ e } b = c - 2$$

c) Se "a" for um par diferente de 2p, o número de ternos pitagóricos é igual ao número de divisores pares de a^2 menores que **a** e, além disso, c e b são dados por:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} \text{ e } b = c - k$$

Na qual: k = número de divisores de a^2 menores que a^2.

d) se "a" for um ímpar composto, o número de ternos pitagóricos é igual ao número de divisores de a^2 menores que **a** e, além disso, c e b são dados, respectivamente, por:

$$c = \frac{a^2 - k^2}{2k} \text{ e } b = c - k$$

Na qual: k = número de divisores de a^2 menores que **a**.

√Exemplos

1) Ache a quadratura do retângulo sabendo-se que DF = 5

→ **Resolução:**

Como DF = a = 5 é um número primo logo:

$$c = \frac{p^2 + 1}{2} = \frac{5^2 + 1}{2} = 13 \; e b = c - 1 = 13 - 1 = 12$$

Dados: a = 5
b = 12
c = 13

Solução:

Lado menor do retângulo: $AB = \dfrac{b^2}{a + c} = \dfrac{12^2}{5 + 13} = 8$

Lado maior do retângulo:
AD = a + c = 5 + 13 = 18
$A_Q = b^2 = 12^2 = 144m^2$
$A_R = 8*18 = 144m^2$

Por meio dos divisores de 144, pode-se achar outras quadraturas do retângulo. Como os divisores de 144, excluindo 8, 18 e 12, são: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 16, 24, 36, 48,72 e 144, logo:

$1*144 = 144m^2$ $2*72 = 144m^2$ $3*48 = 144m^2$
$4*36 = 144m^2$ $6*24 = 144m^2$ $9*16 = 144m^2$

2) Ache a quadratura do retângulo sabendo-se que FD = 6

→ **Resolução:**
Como FD = a = 6 é um par da for 2p, logo:

$$c = \frac{a^2}{4} + 1 = \frac{6^2}{4} + 1 = 10 \text{ e } b = c - 2 = 10 - 2 = 8$$

Dados: a = 6
b = 8
c = 10

Solução:
Lado menor do retângulo: $AB = \dfrac{b^2}{a+c} = \dfrac{8^2}{6+10} = 4$

Lado maior do retângulo:
AD = a + c = 6 + 10 = 16
$A_Q = b^2 = 8^2 = 64$
$A_R = 4*16 = 64$

Por meio dos divisores de 64, é possível achar outras quadraturas do retângulo. Como os divisores de 64, excluindo 4, 16 e 8, são: 1, 2, 32 e 64, logo:
$1*64 = 64m^2$ $2.32 = 64m^2$

3) Ache a quadratura do retângulo sabendo-se que FD = 12

→ **Resolução:**

Como FD = a = 12 é um par ≠ 2p, logo:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} \text{ e } c - b = k$$

Os divisores pares de $12^2 < 12$ são: 2, 4, 6 e 8, logo, k = 2, 4, 6 e 8.

Para a = 12^2 e k = 2:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{12^2 + 2^2}{2x2} = 37 \text{ e } b = c - k = 37 - 2 = 35$$

Dados:

a = 12

b = 35

c = 37

Solução:

Lado menor do retângulo: $AB = \frac{b^2}{a + c} = \frac{35^2}{12 + 37} = 8$

Lado maior do retângulo: AD = a + c = 12 + 37 = 49

$A_Q = b^2 = 35^2 = 1225$

$A_R = 25.49 = 1225$

Para a = 12^2 e k = 4:

$$c = \frac{a^2 + k^2}{2k} = \frac{12^2 + 4^2}{2x4} = 20 \text{ e } b = c - k = 20 - 4 = 16$$

Dados:

a = 12

b = 16

c = 20

Solução:

Lado menor do retângulo:

$$AB = \frac{b^2}{a+c} = \frac{16^2}{12+20} = 8$$

Lado maior do retângulo: AD = a + c = 12 + 20 = 32

$A_Q = b^2 = 16^2 = 256$

$A_R = 8.32 = 256$

Para $a = 12^2$ e k = 6:

$$c = \frac{a^2+k^2}{2k} = \frac{12^2+6^2}{2x6} = 15 \text{ e } b = c - k = 15 - 6 = 9$$

Como para k = 6, a > b, logo, o terno (a, b, c) = (12, 9, 15) é pitagórico, mas não é um triângulo pitagórico com a = 12. Da mesma forma se fizer k = 8, o terno pitagórico é: (a, b, c) = (12, 5, 13) e a > b. Nesse caso (a, b, c) também é um terno pitagórico, mas não é um triângulo pitagórico com a = 12.

A quadratura do retângulo para o terno pitagórico (12, 9, 15) será:

Solução:

Lado menor do retângulo:

$$AB = \frac{b^2}{a+c} = \frac{9^2}{12+15} = 3$$

Lado maior do retângulo: AD = a + c = 12 + 15 = 27

$A_Q = b^2 = 9^2 = 81m^2$

$A_R = 3.27 = 81m^2$

A quadratura do retângulo para o terno pitagórico (12, 5, 13) será:

Solução:

Lado menor do retângulo:

$$AB = \frac{b^2}{a+c} = \frac{5^2}{12+13} = 1$$

Lado maior do retângulo: AD = a + c = 12 + 13 = 25
$A_Q = b^2 = 5^2 = 25m^2$
$A_R = 1.25 = 25m^2$

✓ Conclusão

Para que ensinar, no Ensino Fundamental, como encontrar ternos pitagóricos ou as medidas dos lados de um triângulo pitagórico somente pelo fato de esses assuntos fazerem parte do currículo do Ministério da Educação? Para mim é coisa que, isolada, não significa absolutamente nada. Pior: atrapalha a carreira de muitos jovens.

Como podemos esperar algum resultado do ensino da matemática do Ensino Fundamental, se nas ementas não são mencionadas aplicações? Ou será que o que consta nas ementas é apenas para ser cobrado nas provas?

Como seria estimulante, para todos os alunos, se o professor mostrasse o quanto é poderoso e fundamental aquilo que estão aprendendo!

Diante do exposto, podemos afirmar que:

a) a aversão que o aluno tem à matemática, decorre da distância que o Ensino Fundamental guarda da realidade em que vive;
b) já que o aluno não consegue fazer a conexão entre o que aprende e suas necessidades do dia a dia, daí vem o desinteresse e, em consequência, a aversão à matemática;
c) toda a matemática do Ensino Fundamental é importante para a vida do aluno, mas da forma como é "ensinada" não serve para nada.

PARTE X

NÚMEROS COMPLEXOS VERSUS TERNOS PITAGÓRICOS

Os números complexos são utilizados em várias áreas do conhecimento, tais como engenharia, eletromagnetismo, física quântica, teoria do caos, além da própria matemática, em que são estudadas análise complexa e álgebra linear complexa, com aplicações em resolução de equações algébricas e equações diferenciais.Em algumas situações, é comum a troca da letra *i* pela letra j, devido ao frequente uso da primeira como indicação de corrente elétrica. Há muito tempo, em nossos currículos de Ensino Médio, trabalhamos com números complexos. Muitas vezes, passamos a nossos alunos a ideia de que a unidade imaginária i, serve apenas para extrair uma raiz negativa e não proporcionamos a eles a oportunidade de perceber o quão importante o conjunto dos números complexos é em suas aplicações. Nesta décima parte,tenho o objetivo de apresentar, de uma forma simples, como podemos fazer com que o aluno compreenda em que universo é aplicada a tão sugestiva unidade imaginária .

A seguir vamos mostrar que os números complexos, como muitos imaginam, não são aplicados apenas em engenharia elétrica, mas sim, em certos problemas, tal como: encontrar os lados, em números inteiros, de um triângulo retângulo, dada a medida da hipotenusa, que é o que veremos a seguir.

José era filho de um agricultor e cursava o primeiro ano do escola do Ensino Médio. Certo dia o professor passou uma tarefa para casa sobre números complexos. Assim que José chega em casa, sua mãe pergunta:

– Qual o dever de casa, meu filho? José responde:

– Uma lista de exercícios sobre números complexos. O pai de José ao ouvir falar em números complexos, pergunta ao filho:

– E para que serve meu filho, na vida real, números complexos?

O filho responde:

– Eu fiz a mesma pergunta ao professor, e ele me respondeu que a gente só veria a aplicação dos números complexos, caso a gente no futuro fizesse um curso de graduação em engenharia elétrica.

– É por isso, meu filho, que na época que estudei o Científico(atual Ensino Médio), nunca tive o menor interesse em aprender esse tal de números complexos.

– Por que papai?

– Ora, porque durante o período que estudei o Científico, em momento algum tive a oportunidade de ver, em sala de aula, uma só aplicação da matemática “ensinada” numa situação prática do dia a dia.

Certo dia o pai de José se encontra, com um professor por nome Sebá, e pergunta-lhe:

– Professor, sou agricultor e meu filho é estudante do Ensino Médio; o professor dele passou uma lista de exercícios sobre números complexos e disse que os números complexos só têm aplicação em curso de graduação de engenharia elétrica. Isso é verdade?

Respondeu o professor Sebá:

– Não! Vejamos alguns exemplos.

Aplicações dos números complexos

1) Suponha que você delimitou um terreno retangular com perímetro igual a 226 metros e notou que a diagonal media 85 metros, pergunta-se: quais as medidas do retângulo em números inteiros?

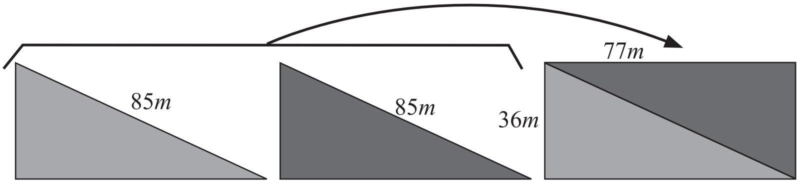
→ **Resolução:**

Seja (a, b, c) as medidas dos lados de um triângulo pitagórico. Como c é a medida da hipotenusa, logo, c = 85. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$85 = x^2 + y^2$$
$$85 = 5*17 = (2^2 + 1^2)(4^2 + 1^2)$$

Aplicando números complexos, obtém-se:

$$(2 + i)(4 + i) = -7 + 6i.\ \text{Logo, } x = 7 \text{ e } y = 6.$$
$$\text{Portanto: } 85 = x^2 + y^2 = 7^2 + 6^2$$



Como o retângulo é composto por dois triângulos pitagóricos iguais, logo, basta achar as medidas dos lados de um deles. Para achar as medidas dos lados de um triângulo pitagórico tendo o valor da hipotenusa, basta usar as fórmulas de Euclides, as quais são:

$$a = x^2 - y^2 \text{ (um dos catetos)}$$
$$b = 2xy \text{ (o outro cateto)}$$
$$c = x^2 + y^2 \text{ (hipotenusa)}$$
$$x > y$$

$$a = 9^2 - 2^2 = 77$$
$$b = 2 \cdot 9 \cdot 2 = 36$$
$$c = 9^2 + 2^2 = 85$$

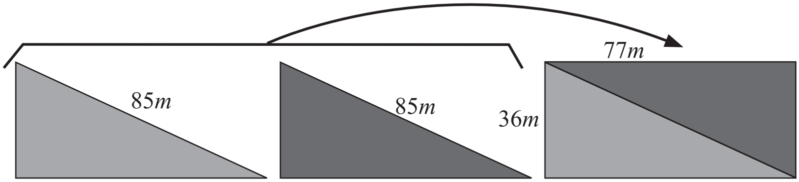
As medidas dos lados do triângulo pitagórico são: (a, b, c) = (77, 36, 85).

Como a diagonal de um retângulo, com as medidas dos lados números naturais, é comum a dois triângulos pitagóricos iguais, logo, unindo os dois triângulos pitagóricos pelas duas hipotenusas, obtém-se um retângulo com as medidas:

Lado menor: 36m, lado maior: 77m e diagonal: 85m.

Perímetro do retângulo: 2*36 + 2*77 = 226m

As figuras abaixo mostram a união dos dois triângulos pitagóricos formando um retângulo



– O senhor sabe que é possível, usando números complexos, delimitar outro terreno retangular com a diagonal medindo 85m e perímetro menor que 226m?

– Duvido! Só acredito vendo.

– Vejamos:

Trocando o sinal de 2 + i ou de 4 + i. Troquemos o sinal de 2 + i:

$$(2 - i)(4 + i) = 9 - 2i$$

$$85 = 92 + 22$$

Como 85 pode ser escrito de outra maneira: $85 = 7^2 + 6^2$, então:

$$a = 7^2 - 6^2 = 13$$

$$b = 2 \cdot 7 \cdot 6 = 84$$

$$c = 7^2 + 6^2 = 85$$

As medidas dos lados do triângulo piotagórico são: (a, b, c) = (13, 84, 85)

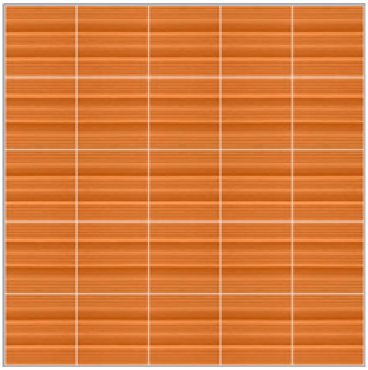
Como a diagonal de um retângulo, com as medidas dos lados números naturais, é comum a dois triângulos retângulos iguais, logo, unindo os dois triângulos pitagóricos pelas hipotenusas, obtém-se um retângulo com as seguintes medidas:

Lado menor: 13m, lado maior: 84m e diagonal: 85m

Perímetro do novo retângulo: 2*13 + 2*84 = 194m

Usando números complexos, foram gastos 32m a menos para delimitar um terreno com mesma diagonal (claro que a área desse terreno é bem menor).

2. Com 25 tijolos faz-se um quadrado com 5 tijolos em cadalado; se o quadrado de lado 5 for dividido em dois quadrados menores, qual a medida do lado de cada um?



→ **Resolução:**

$$25 = 5 \cdot 5 = (1^2 + 2^2)(1^2 + 2^2) = (1 + 2i)(1 + 2i) = -3 + 4i$$
$$25 = 3^2 + 4^2$$

Resposta:

Um quadrado com lado 3 tijolos e outro com lado 4 tijolos.

Trocando o sinal de 1 + 2i:

$$(1 - 2i)(1 + 2i) = 5 + 0i$$
$$25 = 0^2 + 5^2$$

Matematicamente, $25 = 0^2 + 5^2$ é uma igualdade verdadeira, mas não satisfaz ao problema proposto.

PARTE XI

CÍRCULOS ISODIAMÉTRICOS INSCRITOS EM TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS COM PERÍMETROS DIFERENTES

Se forem dados dois triângulos pitagóricos com os perímetros diferentes e inscrever cada um deles num círculo, sendo iguais os diâmetros de cada um; se **a** e **x** forem dois números, respectivamente, da forma 4k + 1 e 4k + 2, os raios dos dois círculos, além de serem iguais, são dois números pares. E se **a** e **x** forem dois números, respectivamente, da forma 4k + 3 e 4k + 4, os raios dos dois círculos além de serem iguais, são dois número ímpares.

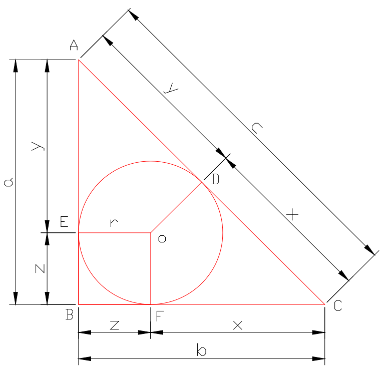
Primeiro temos que demonstrar: se um círculo for inscrito num triângulo pitagórico, o raio é dado por

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

(onde a, b, c são, respectivamente, cateto menor, cateto maior e hipotenusa).

Demonstração:

A figura abaixo mostra um círculo inscrito num triângulo pitagórico.



Seja p o semiperímetro do triângulo ABC. Logo, 2x + 2y + 2z = 2p ou x + y + z = p. Mas como x + y = c, então, c + z = p ou z = p – c. Já que r = z, logo, r = p – c. E como

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

então,

$$r = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2} \textbf{ ou } r = \frac{a + b - c}{2} \text{(F.A.D.).}$$

Sejam a < b < c e x < y < z as medidas dos lados de dois triângulos pitagóricos. Se construirmos dois triângulos pitagóricos com c – b = 1 e z – y = 2 e inscrever um círculo em cada um dos triângulos:

a) se **a** e **x** forem, respectivamente, da forma 4k + 1 e 4k + 2, os raios dos dois círculos além de serem iguais, são dois números pares;
b) se **a** e **x** forem, respectivamente, da forma 4k + 3 e 4k + 4, os raios dos dois círculos além deerem iguais, são dois número ímpares.

Pela demonstração dada acima, vimos que: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ (1) e c > b.

Seja k = c – b, logo, b – c = – k. Substituindo b – c = – k na (1), obtém-se:

$r = \dfrac{a-k}{2}$.

Sejam r_1 o raio do círculo inscrito no triângulo pitagórico de cateto menor **a,** r_2 o raio do círculo inscrito no triângulo pitagórico de cateto menor **x**, k_1 = c – b = 1 e k_2 = z – y = 2. Daí temos:

$$r_1 = \frac{a-k_1}{2} = \frac{4k+1-1}{2} = 2k \ \textbf{ e } \ r_2 = \frac{x-k_2}{2} = \frac{4k+2-2}{2} = 2k$$

Portanto, r_1 e r_2 além de serem iguais, são dois números pares (F.A.D.).

Pela letra **a**, $r_1 = r_2$. Como $r_1 = \dfrac{a-1}{2}$ e a = 4k + 3, logo, $r_1 = \dfrac{4k+3-1}{2} = 2k+1$.

Já que $r_2 = \dfrac{x-2}{2}$ e $a = 4k + 4$, logo,

$$r_2 = \frac{4k+4-2}{2} = 2k+1.$$

Portanto, r_1 e r_2 além de serem iguais, são dois números ímpares (FAD).

√Exemplo

1) Sejam a < b < c e x < y < z as medidas dos lados de dois triângulos pitagóricos. Constroem-se dois triângulos pitagóricos com c – b = 1 e z – y = 2 e inscreve-se um círculo em cada um deles. Se a = 5 e x = 6, pergunta-se: qual a medida do raio de cada círculo?

→ **Resolução:**

Como a = 5 e x = 6 são, respectivamente, da forma 4k +1 e 4k + 2, logo:

$$r_1 = \frac{a-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{x-2}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$

Resposta: A medida do raio de cada círculo é: $r_1 = r_2 = 2$ u.c.

2) Sejam a < b < c e x < y < z as medidas dos lados de dois triângulos pitagóricos. Constroem-se dois triângulos pitagóricos com c – b = 1 e z – y = 2 e inscreve-se um círculo em cada um deles. Se a = 7 e x = 8, pergunta-se: qual a medida do raio de cada círculo?

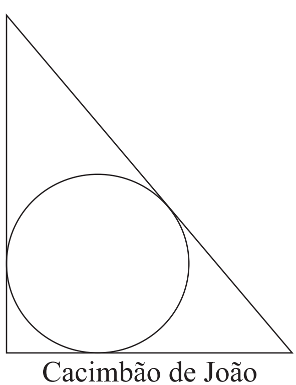
→ **Resolução:**
Como a = 7 e x = 8 são, respectivamente, da forma 4k +3 e 4k + 4, logo:

$$r_1 = \frac{a-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \textbf{e} \quad r_2 = \frac{x-2}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$$

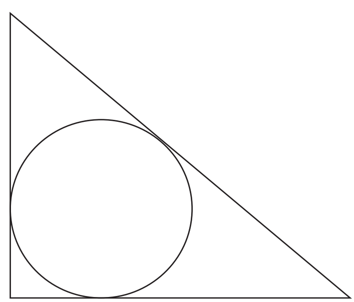
Resposta: A medida do raio de cada círculo é: $r_1 = r_2 = 3$ u.c.

FLAGRANTE DA VIDA REAL

João construiu um cacimbão com diâmetro igual a 8m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 90m. José seu irmão afirmou que também construiu um cacimbão com diâmetro igual a 8m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 60m. (As figuras abaixo representam os cacimbões de João e José).



Cacimbão de João



Cacimbão de José

Pergunta-se: é verdadeira a afirmação de José?

→ **Resolução:**

Sejam r_1 e r_2, respectivamente, as medidas dos raios dos cacimbões de João e José. Como os dois círculos são isodiamétricos e, além disso, as medidas dos raios são números pares, logo, a medida do cateto menor de cada cacimbão é dada por: a = 4x + 1 e x = 4x + 2.

Como $r_1 = 4$, logo, $\frac{a-1}{2} = 4$. Tirando o valor de **a**, obtém-se: a = 9. Já que $r_2 = 4$, $\frac{x-2}{2} = 4$.

Tirando o valor de **x**, obtém-se: x = 10.

Os divisores de $9^2 < 9$ são: 1 e 3.

Para k = 1: $a = \frac{9^2 + 1^2}{2x1} = 41$ e b = c – k = 41 – 1 = 40

9m + 40m + 41m = 90m (Cacimbão de João)

Para k = 3: $a = \frac{9^2 + 3^2}{2x3} =$ 15 e b = c – k = 15 – 3 = 12

9m + 12m + 15m = 36m < 90m

Os divisores pares de $10^2 < 10$ são: 2 e 4.

Para k = 2: $a = \frac{10^2 + 2^2}{2x2} = 26$ e b = c – k = 26 – 2 = 24

10m + 24m + 26m = 60m (Cacimbão de José)

Para k = 4: $a = \dfrac{10^2 + 4^2}{2 \ x \ 4} = 14{,}5$ (Não é a medida do lado de um triângulo pitagórico)

Resposta:
A afirmação de José é verdadeira.

☑ Conclusão

Com a aplicação dos ternos pitagóricos, José economizou 30 metros de cerca.

PARTE XII

COMO ACHAR A MEDIDA DA DIAGONAL DE UM PARALELEPÍPEDO EM NÚMEROS NATURAIS

TEOREMA DE SEBÁ - A equação $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ tem infinitas soluções em inteiros positivos.

Demonstração:

Se $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$, então, $w + z = \dfrac{x^2 + y^2}{w - z}$. Se $x^2 + y^2 = t$, temos: $w + z = \dfrac{t}{w - z}$. Como x, y, w e z tem que ser inteiros, logo, x – y são os divisores positivos de t, menores que t. Se w – z = k, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} w - z = k \\ w + z = \dfrac{t}{k} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$2w = k + \frac{t}{k} \text{ ou } w = \frac{t + k^2}{2k}$$

Como 2w é sempre par, logo, k e t têm que ser ambos pares ou ambos ímpares.

Método de Resolução da Equação $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ em Inteiros Positivos.

Escolhamos dois números quaisquer x^2 e y^2. Por exemplo, $x^2 = 2^2$ e $y^2 = 3^2$.

Temos: $t = 2^2 + 3^2 = 13$.

Como 13 é um primo, logo, o divisor próprio de 13 é a unidade. Portanto, $k = 1$.

$$w = \frac{t + k^2}{2k} = \frac{13 + 1^2}{2x1} = 7 \text{ e } z = w - k = 7 - 1 = 6$$

Solução: $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$ e $w = 7$

Verificação:

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$4 + 9 + 36 = 49$

$49 = 49$

Outro exemplo: $x^2 = 2^2$ e $y^2 = 4^2$. Temos: $t = 2^2 + 4^2 = 20$. Os divisores próprios de 20 são: 1, 2, 4, 5. Logo, $k = 2$ e 4.

Para $k = 2$, temos: $w = \dfrac{20 + 2^2}{2x2} = 6$ e $z = w - k = 6 - 2 = 4$

Solução: $x = 2$, $z = 4$, $y = 4$ e $w = 6$

Verificação:

$2^2 + 4^2 + 4^2 = 6^2$.

$4 + 16 + 16 = 36$

$36 = 36$

Para $k = 4$, temos: $w = \dfrac{20 + 4^2}{2x4} = 4{,}5$ e (Para $k = 4$, w não é um inteiro)

Mais outro exemplo: $x^2 = 1^2$ e $y^2 = 8^2$

Temos: $t = 1^2 + 8^2 = 65$.

Os divisores próprios de 65 são: 1, 5, 13. Logo, $k = 1, 5, 13$.

Para k = 1, temos: $w = \dfrac{65+1^2}{2x1} = 33$ e z = w – k = 33 – 1 = 32

Solução: x = 1, y = 8, z = 32 e w = 33

Verificação:
$1^2 + 8^2 + 32^2 = 33^2$
1 + 1024 + 64 = 1089
1089 = 1089

Para k = 5, temos: $w = \dfrac{65+5^2}{2x5} = 9$ e z = w – k = 9 – 5 = 4

Solução: x = 1, y = 4, w = 8 e z = 9

Verificação:
$1^2 + 8^2 + 4^2 = 9^2$
1 + 64 + 16 = 81
81= 81

FLAGRANTE DA VIDA REAL

Um pai ao morrer deixou como herança um terreno quadrado (w) para ser dividido entre seus três filhos, atendendo ao seguinte critério: do mais novo ao mais velho receberá área da menor para a maior: x, y e z. Se a soma das áreas x e y é igual a 137m², pergunta-se: qual a área que cada filho receberá, sabendo-se que as dimensões de cada área são números inteiros?

→ **Resolução:**
$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$
$x^2 + y^2 = 137$

Note que o número 137 é primo. Será que 137 é da forma 4x + 1? Vejamos: 137 = 4x + 1, então, $x = \frac{53-1}{4} = 13$. Como x é um inteiro, logo, 137 é um primo da forma 4x + 1. Segundo Fermat, todo primo da forma 4x + 1 pode ser escrito como soma de dois quadrados de uma única maneira: $a^2 + b^2 = p$ (primo). Só não explicou como calcular a e b.

Fermat também provou, que um primo da forma 4x + 3 não pode ser escrito como a soma de dois quadrados. Um primo (p) é da forma 4x + 3, se p dividido por 4 deixar resto 3, ou seja, se $x = \frac{p-3}{4}$ for um inteiro.

Nota-se, que em todos os primos da forma 4x + 1, $p = x^2 + y^2$, x e y são primos entre si e de paridades opostas, ou seja, um par e outro ímpar. Será que essa propriedade é sempre verdadeira?

Euclides provou, que a fórmula $x^2 + y^2 = c^2$, se **c** for um primo, **c** é da forma 4x + 1 e, além disso, x e y são sempre primos entre si e de paridades opostas, um par e outro ímpar.

Baseado na demonstração de Euclides, deduzimos uma fórmula para encontrar x e y para primos pequenos; para primos grandes é aconselhável usar o **Wolfram Alpha**, haja vista que à medida que p cresce, o número de operações cresce assustadoramente.

Para nossas atividades práticas do dia a dia, escrever um primo com três ou quatro dígitos como soma de dois quadrados de inteiros diferentes de zero, já é satisfatório. Procurar método para escrever um primo com mais de quatro dígitos como soma de dois quadrados de inteiros diferentes de zero, sem usar o **Wolfram Alpha**, isso é tarefa para os teóricos dos números.

DEDUÇÃO DA FÓRMULA

Como $p = x^2 + y^2$, então, $y = \sqrt{p - x^2}$. Já que $p - x^2$ não pode ser negativo, logo, $x \leq \sqrt{p}$.

Regra

1º passo: verifique se o primo (p) dado é da forma $4x + 1$; se não for, então, p não pode ser escrito somo soma de dois quadrados. Se p for da forma $4x + 1$, extraia a raiz quadrada de p e considere apenas a parte inteira (PI). Já que se x for ímpar, y é par ou se x for par, y é ímpar, vamos supor que x seja par. Como $p = 137$, temos: $\sqrt{137} = 11,7$. (PI = 11). Teríamos que testar: PI =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ou 11.

Como o último algarismo de um número primo pode ser 1, 3, 7 ou 9, logo:

a) Se o último algarismo de um primo for 1, x termina em1, 5, 6 ou 9;
b) Se o último algarismo de um primo for 3, x termina em 2, 3, 7, ou 8;
c) Se o último algarismo de um primo for 7, x termina em 1, 4, 6 ou 9;
d) Se o último algarismo de um primo for 9, x termina em 3, 5, 7 ou 8.

Já que PI = 11 e p termina em 7, logo, em vez de testar x = 1, 2, 3, 4,5, 6,7, 8, 9, 10 e 11 (onze números), basta testar x = 1, 4, 6 e 9 (quatro números)

2º passo: Vá subtraindo x^2 de p; quando $p - x^2$ for um quadrado perfeito, pare. Esse quadrado perfeito é o valor de y^2.

$p - x^2 = 137 - 1^2 = 136$ (Não é quadrado perfeito ou NQP)

$p - x^2 = 137 - 4^2 = 121$ (É quadrado perfeito ou QP)

Já que $121 = 11^2$, então:

$$x^2 + y^2 = 137$$
$$4^2 + 11^2 = 137$$
$$x = 4 \text{ e } y = 11$$

Como $x = 4$, $y = 11$, logo, $4^2 + 11^2 + z^2 = w^2$

$$137 + z^2 = w^2$$
$$137 = w^2 - z^2$$
$$(w + z)(w - z) = 137$$

Como 137 é um número primo, logo, o divisor próprio (k) de 137 é 1, logo, k = 1.

$$\begin{cases} w - z = 1 \\ w + z = \dfrac{137}{1} = 137 \end{cases}$$

Para k = 1, temos: $w = \dfrac{137 + 1^2}{2x1} = 69$ e z = w – k = 69 – 1 = 68

Solução:
x = 4, y = 11, z = 68 e w = 69

Verificação:
$4^2 + 11^2 + 68^2 = 69^2$
16 + 121 + 4624 = 4761
4761 = 4761

Resposta: Cada filho, do menor para o maior, receberá: 16m², 121m², 4624m².

Outro Método para Resolver a Equação $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ em Inteiros Positivos

Ligando os dois ternos pitagóricos (3, 4, 5) e (5, 12, 13), o 5 desaparece, e resulta a quadra (3, 4, 12, 13); portanto, $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$.

Outro exemplo: (5, 12, 13) e (13, 84, 85) fornecem: (5, 12, 84, 85). Portanto, $5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$.

Como encontrar dois ternos pitagórico: (a, b, c) e (c, d, e)?

Não é difícil demonstrar que:

a) se "a" (cateto menor) for um primo ímpar: $c = \frac{a^2 + 1}{2}$ (hipotenusa) e b = c – 1 (cateto maior)

b) se "a" for um par da forma 2p (p primo): $c = \frac{a^2}{4} + 1$ e b = c – 2

c) se "a" for um número composto (par ou ímpar): $c = \frac{a^2 + k^2}{2k}$

e b = c – k (k são os divisores **pares** de a^2, tal que k < a,se "a" for par; k são os divisores de a^2, tal que k < a, se "a" for ímpar).

√Outros exemplos

1. Encontre um terno pitagórico (3, b, c)

→ **Resolução:**

Como a = 3 é um primo, logo: $c = \frac{3^2 + 1}{2} = 5$ e b = 5 – 1 = 4

Resp. (3, b, c) = (3. 4, 5)

Como o terceiro elemento do terno é 5, um número primo, logo:

$d = \frac{5^2 + 1}{2} = 13$ e e = 13 – 1 = 12

O terno pitagórico é: (c, d, e) = (5, 12, 13)

Ligando os dois ternos pitagóricos (3, 4, 5) e (5, 12, 13), o 5 desaparece, e resulta a quadra (3, 4, 12, 13); portanto, $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$ (Terceira dimensão).

2. Encontre um terno pitagórico (5, b, c)

Pelo resultado do exemplo 1, temos: (5, b, c) = (5, 12, 13)

Como o terceiro elemento do terno é 13, um número primo, logo:

$$d = \frac{13^2 + 1}{2} = 85 \text{ e } e = 85 - 1 = 84$$

O terno pitagórico é: (c, d, e) = (13, 84, 85)

Ligando os dois ternos pitagóricos (5, 12, 13) e (13, 84, 85), o 13 desaparece, e resulta a quadra (5, 12, 84, 85); portanto, $5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$.

3. Encontre um terno pitagórico (6, b, c)

Como a = 6 = 2 x 3 (da forma 2p), logo:

$$c = \frac{6^2}{4} + 1 = 10 \text{ e } b = 10 - 2 = 8$$

O terno pitagórico é: (6, b, c) = (6, 8, 10)

Como a = 10 = 2 x 5, da forma 2p, logo, temos que encontrar o terno (c, d, e).

$$d = \frac{10^2}{4} + 1 = 26 \text{ e } e = 26 - 2 = 24$$

O terno pitagórico é: (c, d, e) = (10, 24, 26)

(6, 8, 10) (10, 24, 26)

A quadra é: (a, b, d, e) = (6, 8, 24, 26) e $6^2 + 8^2 + 24^2 = 26^2$

4. Encontre um terno pitagórico (7, b, c)

→ **Resolução:**

Como a = 7 é um primo, logo: $c = \dfrac{7^2 + 1}{2} = 25$ e b = 25 – 1 = 24

(7, b, c) = (7, 24, 25)

Como o terceiro elemento do terno é 25, temos que encontrar o terno pitagórico: (25, d, e)

Os divisores de 25^2, tal que k < a, são: 1 e 5, logo, k = 1 e 5.

Para k = 1 e a = 25:

$$d = \frac{25^2 + 1^2}{2x1} = 313 \text{ e } e = 313 - 1 = 312$$

O terno pitagórico (25, d, e) = (25, 312, 313)
(7, 24, 25) (25, 312, 313)
A quadra é: (a, b, d, e) = (7, 24, 312, 313) e $7^2 + 24^2 + 312^2 = 313^2$

Para k = 5 e a = 25:

$$c = \frac{25^2 + 5^2}{2x5} = 65 \text{ e b} = 65 - 5 = 60$$

O terno pitagórico (25, d, e) = (25, 60, 65)
(7, 24, 25)(25, 60, 65)
A quadra é: (a, b, d, e) = (7, 24, 60, 65) e $7^2 + 24^2 + 60^2 = 65^2$

Pode-se encontrar solução para a equação: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = w^2$ (Quarta dimensão). Se não, vejamos:

Pelos resultados acima, já temos os ternos: (3, 4, 5), (5, 12, 13) e (13, 84, 85). Basta eliminar: o 5 do 1º terno, o 5 do 2º, o 13 do 2º e o 13 do 3º, fica a quina: (3, 4, 12, 84, 85) e
$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$.

Para achar as outras quinas, basta achar os ternos pitagóricos com a = 85.

Os divisores de 85^2, tal que k < a, são: 1, 5, 17 e 25, logo, k = 1, 5, 17 e 25.

Para k = 1 e a = 85:

$$d = \frac{85^2 + 1^2}{2x1} = 3613 \text{ e e} = 3613 - 1 = 3612$$

O terno pitagórico (85, d, e) = (85, 3612, 3613)

Os três ternos pitagóricos são: (5, 12, 13), (13, 84, 85), (85, 3612, 3613). Eliminando o 5 do 1º terno, o 13 do 2º, o 85 do 2º e o 85 do 3º, fica a quina: (5, 12, 84, 3612, 3613) e $5^2+12^2+84^2+3612^2 = 3613^2$.

Para k = 5 e a = 85:

$$c = \frac{85^2 + 5^2}{2x5} = 725 \text{ e } \mathbf{b = 725 - 5 = 720}$$

O terno pitagórico (85, d, e) = (85, 720, 725)

Os três ternos pitagóricos são: (5, 12, 13), (13, 84, 85), (85, 720, 725). Eliminando o 5 do 1º terno, o 13 do 2º, o 85 do 2º e o 85 do 3º, fica a quina: (5, 12, 84, 720, 725) e $5^2+12^2+84^2+720^2 = 725^2$.

Para k = 17 e a = 85:

$$c = \frac{85^2 + 17^2}{2x17} = 221 \text{ e } \mathbf{b = 221 - 17 = 204}$$

O terno pitagórico (85, d, e) = (85, 204, 221)

Os três ternos pitagóricos são: (5, 12, 13), (13, 84, 85), (85, 204, 221). Eliminando o 5 do 1º terno, o 13 do 2º, o 85 do 2º e o 85 do 3º, fica a quina: (5, 12, 84, 204, 221) e $5^2+12^2+84^2+204^2 = 221^2$.

Para k = 25 e a = 85:

$$c = \frac{85^2 + 25^2}{2x25} = 157 \text{ e b} = 157 - 25 = 132$$

O terno pitagórico (85, d, e) = (85, 132, 157)

Os três ternos pitagóricos são: (5, 12, 13), (13, 84, 85), (85, 132, 157). Eliminando o 5 do 1º terno, o 13 do 2º, o 85 do 2º e o 85 do 3º, fica a quina:

(5, 12, 84, 132, 157) e $5^2 +12^2+84^2+132^2 = 157^2$.

Conclusão - Se "a" for um número composto no intervalo $4 < a < \infty$ ou um primo ímpar no intervalo $2 < a < \infty$, as três fórmulas acima geram todas as quadras e quinas e em sequência. Uma outra aplicação das quadras é na determinação da diagonal da base de uma caixa em forma de um paralelepípedo retângulo com lados inteiros. Pode-se ampliar o método para encontrar a quinta, sexta, sétima, ... , n-ésima dimensão.

Mais Outro Método para Resolver a Equação $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ em Número Inteiros

Se $N = a^2 + b^2 = d^2 - c^2$, então, $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Como exemplo temos: $17 = 4^2 + 1^2 = 9^2 - 8^2$, que dá a solução: $4^2 + 1^2 + 8^2 = 9^2$. Portanto, $x = 4$, $y = 1$, $z = 8$ e $w = 9$

$85 = 6^2 + 7^2 = 2^2 + 9^2 = 43^2 - 42^2 = 11^2 - 6^2$

$85 = 6^2 + 7^2 = 43^2 - 42^2 = 2^2 + 9^2 = 11^2 - 6^2$

$85 = 6^2 + 7^2 = 43^2 - 42^2 = 2^2 + 9^2 = 11^2 - 6^2$

$6^2 + 7^2 + 42^2 = 43^2$

$6^2 + 7^2 + 6^2 = 11^2$

$2^2 + 9^2 + 42^2 = 43^2$

$2^2 + 9^2 + 6^2 = 11^2$

PARTE XIII

COMO ACHAR O RAIO DE UM CÍRCULO INSCRITO NUM TRIÂNGULO PITAGÓRICO DADO APENAS O CATETO MENOR

TEOREMA SEBÁ 2 - Se um círculo for inscrito num triângulo pitagórico, o raio é dado por $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ (onde a, b, c são, respectivamente, cateto menor, cateto maior e hipotenusa) e, além disso, as afirmativas abaixo são todas verdadeiras.

a) Se a for um número composto, então, $r = \dfrac{a-k}{2}$ (onde k = c – b) e, além disso, r é sempre inteiro;

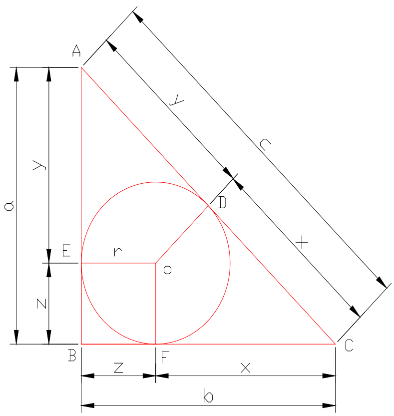
b) Se a > 2 for um primo, então, $r = \dfrac{a-1}{2}$ e, além disso, r é sempre inteiro (par ou ímpar);

c) Se a = 2p (onde p > 2 é um primo), então, $r = \dfrac{a-2}{2}$ e, além disso, r é sempre par.

Demonstração

A figura abaixo é um triângulo pitagórico. Seja p o semiperímetro do triângulo ABC. Logo, 2x + 2y + 2z = 2p ou x + y + z = p.

Mas como x + y = c, então, c + z = p ou z = p – c. Já que r = z, logo, r = p – c. E como $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, então, $r = \dfrac{a+b+c}{2} - c$. Portanto, $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ (F.A.D.).



a) Como $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ e c > b, logo, b – c < 0. Designando b – c = – k, obtém-se: $r = \dfrac{a-k}{2}$. Resta-nos provar que r é sempre inteiro. Como o triângulo é pitagórico, logo, $c^2 = a^2 + b^2$ ou $c+b = \dfrac{a^2}{c-b}$. Já que a, b, e c são inteiros, então, c – b = k é divisor de a^2.

Como $c+b = \dfrac{a^2}{c-b}$, logo:

$$\begin{cases} c - b = k \\ c + b = \dfrac{a^2}{k} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtém-se: $c = \dfrac{a^2+k^2}{2k}$ e b = c – k.

Se k = a $\Rightarrow$ $c = \dfrac{a^2+a^2}{2a} = \dfrac{2a^2}{2a} = a$. Como b = c – k, logo, b = a – a = 0. Portanto, k < a.

Suponhamos que **a** seja par. Como c é inteiro, 2k tem que dividir $a^2 + k^2$ sem deixar resto. Já que 2k é par, então, a fim de que c seja inteiro, a soma $a^2 + k^2$, tem de ser sempre par. Como **a** épar, logo, a^2 também o é. Então, a soma $a^2 + k^2$, só será par se k^2 também o for. Portanto, quando **a** for par, k também o será.. Assim sendo, r será sempre inteiro.

Suponhamos que **a** seja ímpar. Já que c é inteiro, 2k tem que dividir, a soma $a^2 + k^2$, sem deixar resto. Já que 2k é par, logo, a fim de que c seja inteiro, a soma $a^2 + k^2$, tem de ser sempre par. Como **a** é ímpar, a soma $a^2 + k^2$, só será par se k^2 for ímpar. Portanto, quando "**a**" for ímpar, k também o será. Sendo assim, r será sempre inteiro (F.A.D.).

b) Como $c+b=\dfrac{a^2}{c-b}$ e, além disso, b e c são inteiros, logo, c – b são os divisores de a^2. Como a > 2 é um primo, logo, os divisores de a^2 são: a^2, a e 1. Substituindo a^2, a e 1 em $c+b=\dfrac{a^2}{c-b}$, obtém-se os seguintes sistemas de equações:

$$S_1\begin{cases} c-b=a^2 \\ c+b=a \end{cases} \quad S_2\begin{cases} c-b=a \\ c+b=a^2 \end{cases} \quad S_3\begin{cases} c-b=1 \\ c+b=1 \end{cases}$$

Dos três sistemas de equações acima apenas o S_3 é compatível. Resolvendo o S_3, obtém-se: $c=\dfrac{a^2+1}{2}$ e b = c – 1. Portanto, existe apenas um triângulo pitagórico com a = p (onde p é um primo ímpar).

Como c – b = 1, logo, b – c = – 1. Substituindo b – c = – 1 em $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, obtém-se: $r=\dfrac{a-1}{2}$. Já que a > 2 é primo, logo, (a – 1) será sempre par e, consequentemente, r será sempre par (F.A.D.).

c) Como $c+b=\dfrac{a^2}{c-b}$ e a = 2p, logo, substituindo **a** por 2p, obtém-se: $c+b=\dfrac{4p^2}{c-b}$. Como c e b têm que ser inteiros, logo, c – b < 2p são os divisores de $4p^2$. Já que $4p^2$ é par, logo, pelo item a, c – b é par. Os divisores pares de $4p^2$, menores que 2p, são: 2 e 4. Substituindo 2 e 4 em $c+b=\dfrac{4p^2}{c-b}$, obtém-se os seguintes sistemas de equações:

$$S_1\begin{cases} c-b=2 \\ c+b=2p^2 \end{cases} \qquad S_2\begin{cases} c-b=4 \\ c+b=p^2 \end{cases}$$

Dos dois sistemas de equações acima apenas o S_1 é compatível. Resolvendo o S_1, obtém-se: $c = p^2 + 1$.

Como a = 2p, então, $p=\dfrac{a}{2}$. Substituindo p^2 por $\dfrac{a}{2}$, obtém-se: $c=\dfrac{a^2}{4}+1$ e b = c – 2.

Portanto, existe apenas um triângulo pitagórico com a = 2p.

Como c – b = 2, logo, b – c = – 2.

Substituindo b – c = – 2 em $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, obtém-se: $r=\dfrac{a-2}{2}$. Já que a = 2p, logo, $r=\dfrac{2p-2}{2}=p-1$. Como p > 2 é sempre primo, então, r será sempre par (F.A.D.).

√Exemplos de aplicação

1. Se um círculo está inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor mede 8 cm, qual a medida do raio?

→ **Resolução:**
Como k são os divisores pares de a^2, menores que "a", e já que a = 8, logo, os divisores pares de 8^2, menores que 8, são: 2 e 4. Logo, k = 2 e 4.

Para k = 2, temos: $c = \dfrac{8^2 + 2^2}{2x2} = 17$ e b = c – k = 17 – 2 = 15.

Portanto, as medidas dos lados do triângulo pitagórico são:

a = 8, b = 15 e c = 17.

$$r = \frac{a-k}{2} = \frac{8-2}{2} = 3 \text{ ou } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{8+15-17}{2} = 3$$

Para k = 4, temos: $c = \dfrac{8^2 + 4^2}{2x4} = 10$ e b = c – k = 10 – 4 = 6.
Como num triângulo pitagórico b > a, e como b < a, logo, k = 4 não serve.

Resposta:
Um círculo inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor é 8 cm, a medida do raio é 3 cm.

Verificação pela Fórmula Tradicional do Raio de um Círculo Inscrito num Triângulo Retângulo

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{8x15}{8+15+17} = 3$$

Portanto, o resultado bate com o obtido por meio do teorema de Sebá.

2. Se um círculo está inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor mede 12 cm, qual a medida do raio?

→ **Resolução:**

Como 12 é um número par diferente de 2p e já que os divisores pares de 12^2, menores que 12, são: 2, 4, 6 e 8. logo:

Para k = 2, temos: $c = \frac{12^2 + 2^2}{2x2} = 37$ e b = c – k = 37 – 2 = 35.

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: a = 12, b = 35 e c = 37

$$r = \frac{a-k}{2} = \frac{12-2}{2} = 5 \text{ ou } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{12+35-37}{2} = 5$$

Para k = 4, temos: $c = \frac{12^2 + 4^2}{2x4} = 20$ e b = c – k = 20 – 4 = 16.

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: a = 12, b = 16 e c = 20

$$r = \frac{a-k}{2} = \frac{12-4}{2} = 4 \text{ ou } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{12+16-20}{2} = 4$$

Para k = 6, temos: $c = \dfrac{12^2 + 6^2}{2x6} = 15$ e b = c – k = 15 – 6 = 9.

Como b < a, logo, k = 6 não serve.

Como para k = 6, b < a, logo, para k = 8, “b” também será menor que “a”.

Resposta:

Se dois triângulos pitagóricos têm cateto menor igual 12 cm, pode-se inscrever um círculo, em cada um deles, com raio igual a 4 cm e 5 cm.

Verificação pela Fórmula Tradicional do Raio de um Círculo Inscrito num Triângulo Retângulo

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{12x35}{12+35+37} = 5$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{12x16}{12+16+20} = 4$$

Portanto, mais uma vez os resultados batem com os obtidos por meio do teorema de Sebá.

3. Se um círculo está inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor mede 9 cm, qual a medida do raio?

→ **Resolução:**

Já que 9 é um número ímpar e como os divisores de 9^2, menores que 9, são: 1 e 3, logo:

Para k = 1, temos: $c = \dfrac{9^2 + 1^2}{2x1} = 41$ e b = c – k = 41 – 1 = 40.

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: a = 9, b = 40 e c = 41

$$r = \frac{a-k}{2} = \frac{9-1}{2} = 4 \text{ ou } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{9+40-41}{2} = 4$$

Para k = 3, temos: $c = \dfrac{9^2 + 3^2}{2x3} = 15$ e b = c – k = 15 – 3 = 12. Logo,

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: a = 9, b = 12 e c = 15

$$r = \frac{a-k}{2} = \frac{9-3}{2} = 3 \text{ ou } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{9+12-15}{2} = 3$$

Resposta:

Se dois triângulos pitagóricos têm cateto menor igual 9 cm, pode-se inscrever um círculo, em cada um deles, com raio igual a 4 cm e 3 cm.

Verificação pela Fórmula Tradicional do Raio de um Círculo Inscrito num Triângulo Retângulo

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{9x40}{9+40+41} = 4$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{9x12}{9+12+15} = 3$$

Portanto, mais uma vez os resultados batem com os obtidos por meio do teorema de Sebá.

4. Se um círculo está inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor mede 15 cm, qual a medida do raio?

→ **Resolução:**

Já que 15 é um número ímpar e como os divisores de 15^2, menores que 15, são: 1, 3, 5 e 9 logo:

Para k = 1, temos: $c = \dfrac{15^2 + 1^2}{2x1} = 113$ e b = c – k = 113 – 1 = 112.

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: a = 15, b = 112 e c = 113

$$r = \frac{a-k}{2} = \frac{15-1}{2} = 7 \text{ ou } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{15+112-113}{2} = 7$$

Para k = 3, temos: $c = \dfrac{15^2 + 3^2}{2x3} = 39$ e b = c – k = 39 – 3 = 36.

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: a = 15, b = 36 e c = 39

$$r = \frac{a-k}{2} = \frac{15-3}{2} = 6 \text{ ou } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{15+36-39}{2} = 6$$

Para k = 5, temos: $c = \dfrac{15^2 + 5^2}{2x5} = 25$ e b = c – k = 25 – 5 = 20.

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: a = 15, b = 20 e c = 25

$$r = \frac{a-k}{2} = \frac{15-5}{2} = 5 \text{ ou } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{8+15-17}{2} = 3$$

Para k = 9, temos: $c = \dfrac{15^2 + 9^2}{2x9} = 17$ e b = c – k = 7 – 9 = 8. Como b < a, logo, k = 9 não serve.

Resposta:

Se três triângulos pitagóricos têm cateto menor igual 15 cm, pode-se inscrever um círculo, em cada um deles, com raio igual a 7 cm, 6 cm e 5 cm.

Verificação pela Fórmula Tradicional do Raio de um Círculo Inscrito num Triângulo Retângulo

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{15x112}{15+112+113} = 7$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{15x36}{15+36+39} = 6$$

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{15x20}{15+20+25} = 5$$

Portanto, os resultados mais uma vez batem com os obtidos por meio do teorema de Sebá.

5. Se um círculo está inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor mede 5 cm, qual a medida do raio?

→ **Resolução:**

Como a medida do cateto menor é um número primo ímpar, logo,

$$r = \frac{a-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

Resposta:

Um círculo inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor é 5 cm, a medida do raio é 2 cm.

Verificação pela Fórmula Tradicional do Raio de um Círculo Inscrito num Triângulo Retângulo

Como a medida do cateto menor é 5 (um primo ímpar), logo, $c = \frac{a^2+1}{2} = \frac{5^2+1}{2} = 13$ e b = 13–1 = 12.

As medidas do triângulo pitagórico são: a = 5, b = 12 e c = 13

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{5x12}{5+12+13} = 2.$$

Portanto, o resultado bate com o obtido por meio do teorema de Sebá.

6. Se um círculo está inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor mede 6cm, qual a medida do raio?

→ **Resolução:**

Como a medida do cateto menor é um número par da forma 2p = 2x3 = 6, logo,

$$r = \frac{a-2}{2} = \frac{6-2}{2} = 2.$$

Resposta:

Um círculo inscrito num triângulo pitagórico cujo cateto menor mede 6 u.c.(unidade de comprimento), a medida do raio é 2 u.c.

Verificação pela fórmula tradicional do raio de um círculo inscrito num triângulo retângulo.

Como a medida do cateto menor é 6 = 2 x 3 = 2p, logo, $c = \frac{6^2}{4} + 1 = 10$ e b = c – 2 = 10 – 2 = 8.

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{6x8}{6+8+10} = 2.$$

Portanto, o resultado bate com o obtido por meio do teorema de Sebá.

Teorema (Seba 3). Se as medidas dos lados de um triângulo pitagórico estão em progressão aritmética (PA), então, a razão da PA é igual ao raio do círculo inscrito nesse triângulo.

Demonstração pela Fórmula de Sebá

Sejam a = 3x, b = 4x e c = 5x, respectivamente, cateto menor, cateto maior e hipotenusa de um triângulo pitagórico. Como 3x, 4x e 5x estão em PA, logo, a razão da PA é x. Então, temos:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3x+4x-5x}{2} = \frac{2x}{2} = x \text{ (F.A.D.)}$$

Demonstração pela Fórmula Tradicional

Seja: A = área do triângulo pitagórico
p = semiperímetro do triângulo pitagórico
r = raio do círculo inscrito no triângulo pitagórico
Então, temos:

$$r = \frac{A}{p} = \frac{\frac{(3x)(4x)}{2}}{\frac{3x+4x+5x}{2}} = \frac{6x^2}{6x} = x$$

Resultado que bate com o encontrado pela fórmula de Sebá.

Exemplo. Qual deve ser a medida, em centímetro, do raio de um círculo, a fim de que ele possa ser inscrito num triângulo pitagórico cujas medidas são (6, 8, 10)?

→ **Resolução:**

Como a razão da PA (6, 8, 10) é 2, logo, a medida do raio é 2 cm.

Verificação pela Fórmula de Seba:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{6+8-10}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Verificação pela Fórmula Tradicional:

$$r = \frac{A}{p} = \frac{\frac{(6)(8)}{2}}{\frac{6+8+10}{2}} = \frac{24}{12} = 2$$

Resultado que corrobora o teorema de Sebá

PARTE XIV

DADO O RAIO DE UM CÍRCULO INSCRITO NUM TRIÂNGULO PITAGÓRICO COMO ACHAR AS MEDIDAS DOS LADOS

Pelo **Teorema Sebá 2**, vimos que:

Se a > 2 for um primo, então, $r = \frac{a-1}{2}$. Logo, a = 2r + 1.

Se a = 2p (na qual p > 2 é um primo), então, $r = \frac{a-2}{2}$. Logo, a = 2r + 2. Note que: a = 2r + 2, dependendo do valor de r, vai ser sempre um par da forma 2p ou diferente de 2p.

√Exemplos de aplicação

1. Se o raio de um círculo for 2 cm:

a) em quantos triângulos pitagóricos o círculo pode ser inscrito?
b) quais as medidas dos lados desses triângulos?

→ **Resolução:**

a) Para r = 2 $\Rightarrow$ a = 2r + 1 = 2x2 + 1 = 5 ou a = 2r + 2 = 2 x 2 + 2 = 6

Resposta:

O círculo pode ser inscrito em dois triângulos pitagóricos

b) Para a = 5

Como a medida do cateto menor é 5 (um primo ímpar), logo, $c = \frac{a^2+1}{2} = \frac{5^2+1}{2} = 13$ e b = 13 – 1 = 12.

Para a = 6

Como a medida do cateto menor é um par da forma 2p logo:

$$z = \frac{6^2}{4} + 1 = 10 \text{ e } y = 10 - 2 = 8$$

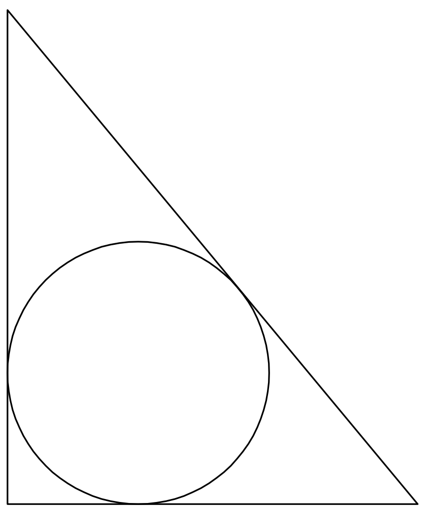
Resposta:

Os triângulos pitagóricos são: (5, 12, 13) e (6, 8, 10)

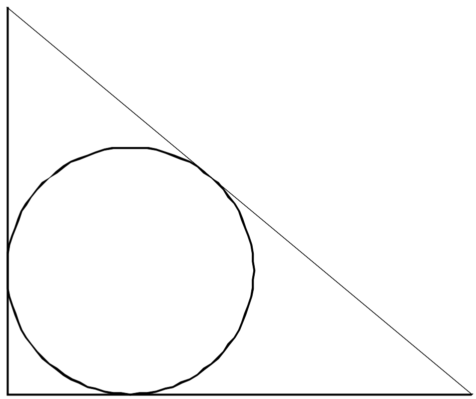
Conclui-se que: Se um círculo de raio 2 u.c. (unidade de comprimento) for inscrito num triângulo pitagórico, a área do triângulo é numericamente igual ao seu perímetro (Demonstração na Parte XII).

FLAGRANTE DA VIDA REAL

Rogério construiu um cacimbão com diâmetro igual a 10m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico (lados a < b < c) com: c – b = 2, perímetro igual a 84m e área igual 210m^2. Marcelo seu irmão afirmou que também construiu um cacimbão com diâmetro igual a 12m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico (lados a < b < c) com: c – b = 8, perímetro igual a 70m e área igual 210m^2. Sabendo-se que tanto no cacimbão de Rogério como no de Marcelo cada lance de cerca é tangente às paredes do cacimbão, pergunta-se: é verdadeira a afirmação de Marcelo?



CACIMBÃO DE MARCELO



CACIMBÃO DE ROGÉRIO

→ **Resolução:**

Pelo Teorema (Sebá 2) vimos que:

Se **a** for um número par ou ímpar composto, então, $r = \dfrac{a-k}{2}$ (onde k = c – b)

Se $r = \dfrac{a-k}{2}$, então, a = 2r + k

Cacimbão de Rogério

Raio $(r) = \dfrac{10}{2} = 5$. Como c – b = 2, logo, k = c – b = 2

a = 2r + k = 2x5 + 2 = 12

Como a medida do cateto menor é um par 2p, logo:

$c = \dfrac{a^2 + k^2}{2k} = \dfrac{12^2 + 2^2}{2x2} = 37$ e b = c – 2 = 37 – 2 = 35.

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: (12, 35, 37)

Perímetro: 12 + 35 + 37 = 84m

Área: $=\dfrac{12x35}{2}=210m^2$

<u>Cacimbão de Marcelo</u>

Raio $(r)=\dfrac{12}{2}=6$. Como c – b = 8, logo, k = c – b = 2

a = 2r + k = 2x6 + 8 = 20

Como a medida do cateto menor é um par da forma 2p, logo:

$c=\dfrac{a^2+k^2}{2k}=\dfrac{20^2+8^2}{2x8}=29$ e b = c – 8 = 29 – 8 = 21.

As medidas, dos lados do triângulo pitagórico, são: (20, 21, 29)
Perímetro: 20 + 21 + 29 = 70m

Área: $=\dfrac{20x21}{2}=210m^2$

Resposta:

A afirmação de Marcelo é verdadeira. E além de ser verdadeira, com a aplicação dos ternos pitagóricos, ele economizou 14 metros lineares de cerca, ou seja,

84m – 70m = 14m.

PARTE XV

COMO INSCREVER DOIS CÍRCULOS ISODIAMÉTRICOS EM DOIS TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS COM PERÍMETROS DIFERENTES

TEOREMA SEBÁ 3 -Sejam a < b < c e x < y < z dois ternos pitagóricos. Se construirmos dois triângulos pitagóricos com c – b = 1 e z – y = 2 e inscrever um círculo em cada um dos triângulos, então:

a) se **a** e **x** forem, respectivamente, da forma 4k + 1 e 4k + 2, os raios dos dois círculos além de serem iguais, são dois números pares;

b) se **a** e **x** forem, respectivamente, da forma 4k + 3 e 4k + 4, os raios dos dois círculos além de serem iguais são dois número ímpares.

Demonstração:

Se um círculo for inscrito num triângulo pitagórico, pelo teorema (Sebá 2), $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

a) Como $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ e c > b, logo, designando b – c = – k, obtém-se: $r = \dfrac{a-k}{2}$. Seja r_1 o raio do círculo inscrito no triângulo pitagórico de cateto menor **a** e r_2 o raio do círculo inscrito no triângulo pitagórico de cateto menor **x**. Seja k_1 = c – b = 1 e k_2 = z – y = 2. Daí temos:

$$r_1 = \frac{a-k_1}{2} = \frac{4k+1-1}{2} = 2k \text{ e } r_2 = \frac{x-k_2}{2} = \frac{4k+2-2}{2} = 2k$$

Portanto, r_1 e r_2 além de serem iguais, são dois números pares (FAD).

b) Pela letra "a", $r_1 = r_2$. Como $r_1 = \dfrac{a-1}{2}$ e a = 4k + 3, logo,

$$r_1 = \frac{4k+3-1}{2} = 2k+1.$$

Já que $r_2 = \dfrac{x-2}{2}$ e a=4k+4, logo, $r_2 = \dfrac{4k+4-2}{2} = 2k+1$.

Portanto, r_1 e r_2 além de serem iguais, são dois números ímpares (FAD).

√Exemplos de aplicação

1. Sejam a < b < c e x < y < z as medidas dos lados de dois triângulos pitagóricos. Constroem-se dois triângulos pitagóricos com c – b = 1 e z – y = 2 e inscreve-se um círculo em cada um dos triângulos. Se a = 5 e x = 6 , pergunta-se: qual a medida do raio de cada círculo?

→ **Resolução:**

Como a = 5 e x = 6 são, respectivamente, da forma 4k +1 e 4k + 2, logo:

$$r_1 = \frac{a-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{x-2}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$

Resposta:

A medida do raio de cada círculo é: $r_1 = r_2 = 2$ u.c. (unidade de comprimento)

2. Sejam a < b < c e x < y < z as medidas dos lados de dois triângulos pitagóricos. Constroem-se dois triângulos pitagóricos com c – b = 1 e z – y = 2 e inscreve-se um círculo em cada um dos

triângulos. Se a = 7 e x = 8, pergunta-se: qual a medida do raio de cada círculo?

→ **Resolução:**

Como a = 7 e x = 8 são, respectivamente, da forma 4k +3 e 4k + 4, logo:

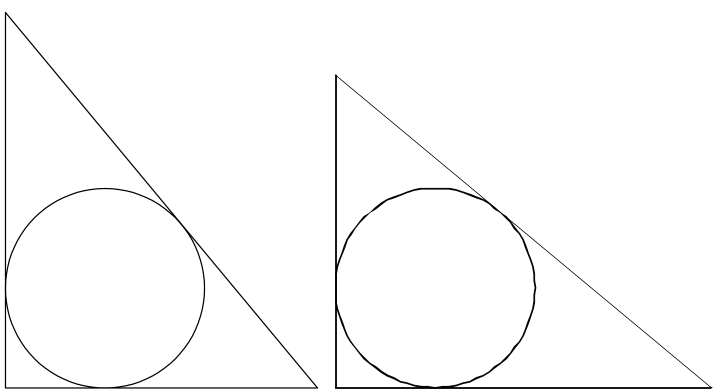
$$r_1 = \frac{a-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{x-2}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$$

Resposta:

A medida do raio de cada círculo é: $r_1 = r_2 = 3$ u.c.

FLAGRANTE DA VIDA REAL I

João construiu um cacimbão com diâmetro igual a 8m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 90m. José seu irmão afirmou que também construiu um cacimbão com diâmetro igual a 8m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 60m. (As figuras abaixo representam os cacimbões de João e José).



CACIMBÃO DE JOÃO **CACIMBÃO DE JOSÉ**

Pergunta-se: é verdadeira a afirmação de José?

→ **Resolução:**

Sejam r_1 e r_2, respectivamente, as medidas dos raios dos cacimbões de João e José. Como os dois círculos são isodiamétricos e, além disso, as medidas dos raios são números pares, logo, a medida do cateto menor de cada cacimbão é dada por: a = 4x + 1 e x = 4x + 2.

Como $r_1 = 4$, logo, $\frac{a-1}{2} = 4$. Tirando o valor de **a**, obtém-se: a = 9. Já que $r_2 = 4$, $\frac{x-2}{2} = 4$.

Tirando o valor de **x**, obtém-se: x = 10.
Os divisores de $9^2 < 9$ são: 1 e 3.
Para k = 1:

$$c = \frac{9^2 + 1^2}{2x1} = 41 \text{ e } b = c - k = 41 - 1 = 40$$

Perímetro: 9m + 40m + 41m = 90m (Cacimbão de João)
Para k = 3

$$c = \frac{9^2 + 3^2}{2x3} = 15 \text{ e } b = c - k = 15 - 3 = 12$$

9m + 12m + 15m = 36m < 90m

Os divisores pares de $10^2 < 10$ são: 2 e 4.

Para k = 2:

$$c = \frac{10^2 + 2^2}{2x2} = 26 \text{ e } b = c - k = 26 - 2 = 24$$

Perímetro: 10m + 24m + 26m = 60m (Cacimbão de José)

Para k = 4: $c = \frac{10^2 + 4^2}{2x4} = 14,5$ (Não é a medida do lado de um triângulo pitagórico)

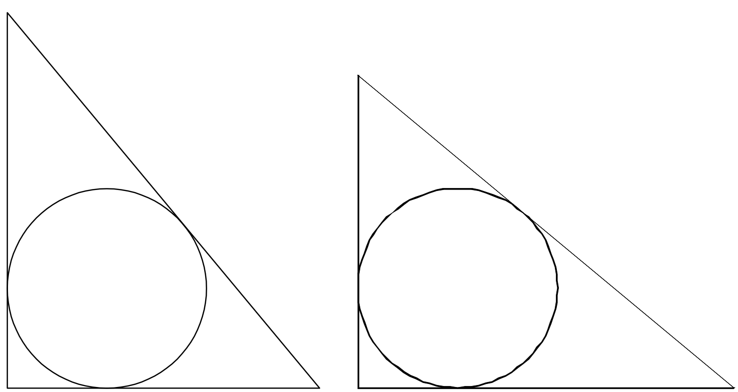
Resposta:
A afirmação de José é verdadeira.

✓ Conclusão

Com a aplicação dos ternos pitagóricos, José economizou 30 metros de cerca, ou seja, 90m – 60m.

FLAGRANTE DA VIDA REAL II

Manoel construiu um cacimbão com diâmetro igual a 10m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 132m. O Sr. Joaquim seu pai afirmou que também construiu um cacimbão com diâmetro igual a 10m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 84m. Sabendo-se que tanto no cacimbão de Manoel como no do Sr. Joaquim cada lance de cerca é tangente às paredes do cacimbão, pergunta-se: é verdadeira a afirmação do Sr. Joaquim? (As figuras abaixo representam os cacimbões de Manoel e Joaquim).



CACIMBÃO DE MANOEL   CACIMBÃO DE JOAQUIM

Pergunta-se: é verdadeira a afirmação de Joaquim?

→ **Resolução:**

Sejam r_1 e r_2, respectivamente, as medidas dos raios dos cacimbões de Manoel e do Sr. Joaquim. Como os dois círculos são isodiamétricos e, além disso, as medidas dos raios são números ímpares, logo, a medida do cateto menor de cada cacimbão é dada por: a = 4k + 3 e x = 4k + 4.

Como r_1 = 5, logo, $\frac{a-1}{2} = 5$.

Tirando o valor de "a", obtém-se: a = 11. Já que r_2 = 5, $\frac{x-2}{2} = 5$. Tirando o valor de "x", obtém-se: x = 12.

Como a = 11 é primo, logo, $c = \frac{a^2+1}{2} = \frac{11^2+1}{2} = 61$ e c – b = c – 2 = 61 – 1 = 60.

Perímetro: 11m + 60m + 61m = 132m (Cacimbão de Manoel).

Como **x** é da forma 4k + 4, logo, c – b = 2 e b = c – 2.

$$c = \frac{a^2+k^2}{2k} = \frac{12^2+2^2}{2x2} = 37$$ e b = c – 2 = 37 – 2 = 35.

Perímetro: 12m + 35m + 37m = 84m (Cacimbão de Joaquim)

Resposta:

A afirmação do Sr. Joaquim é verdadeira. E além de ser verdadeira, com a aplicação dos ternos pitagóricos, ele economizou 48 metros lineares de cerca, ou seja, 132m – 84m.

PARTE XVI

COMO ACHAR OS LADOS DE UM TRIÂNGULO PITAGÓRICO DADO APENAS OPERÍMETRO

TEOREMA SEBA 4 - Se os perímetros do quadrado, do triângulo equilátero e do triângulo retângulo forem iguais, e se as medidas do cateto menor e a do cateto maior forem , respectivamente, as medidas dos lados do quadrado e do triângulo equilátero, então, $\frac{P}{4}$, $\frac{P}{3}$ e $\frac{5P}{12}$ são os lados do triângulo retângulo e, além disso, se o perímetro for um múltiplo de 12, o triângulo retângulo é pitagórico.

Demonstração:

Como P é o perímetro, logo, $\frac{P}{4}$ e $\frac{P}{3}$ são, respectivamente, as medidas dos lados do quadrado e do triângulo equilátero.

Sejam $a = \frac{P}{4}$, $b = \frac{P}{3}$ e c, respectivamente, as medidas do cateto menor, cateto maior e hipotenusa.

O perímetro do triângulo retângulo é dado por: $\frac{P}{4} + \frac{P}{3} + c = P$. Tirando o valor de c, obtém-se: $c = \frac{5P}{12}$.

Vejamos se $\frac{P}{4}$, $\frac{P}{3}$ e $\frac{5P}{12}$:

a) são, realmente, as medidas dos lados de um triângulo retângulo;
b) é, realmente, o perímetro do triângulo retângulo

a) $\left(\frac{P}{4}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^2 = \left(\frac{5P}{12}\right)^2$

$$\frac{25P^2}{144} = \frac{25P^2}{144} \text{ (F.A.D.)}$$

b) $P = \frac{P}{4} + \frac{P}{3} + \frac{5P}{12} = \frac{3P + 4P + 5P}{12} = \frac{12P}{12} = P$ (F.A.D.)

Note que o perímetro do triângulo retângulo é múltiplo de 12., ou seja, $\frac{12P}{P} = 12$.

Perímetro do quadrado(P_Q) = $4\left(\frac{P}{4}\right) = P$

Perímetro do triângulo equilátero (T_E): $3\left(\frac{P}{3}\right) = P$

Perímetro do triângulo retângulo (T_R) = $\frac{P}{4} + \frac{P}{3} + \frac{5P}{12} = P$

Portanto: $P_Q = P_E = T_R$ (F.A.D.).

√Exemplos de aplicação

1. Se o perímetro (P) de um triângulo retângulo for 150m, quais são as medidas dos lados?

→ **Resolução:**

$a = \frac{P}{4} = \frac{150}{4} = 37{,}5$ (Como 150 não é múltiplo de 12, logo, o triângulo não é pitagórico, mas as três fórmulas são válidas para triângulo retângulo não pitgagórico)

$b = \frac{P}{4} = \frac{150}{3} = 50$ e $c = \frac{5P}{12} = \frac{5x150}{12} = 62{,}5$

Verificação:

P = 37,5 + 50 + 62,5 = 150

$a^2 + b^2 = c^2$
$(37,5)^2 + (50)^2 = (62,5)^2$
$1406,25 + 2500 = 3906,25$
$3906,25 = 3906,25$

2. Se o perímetro (P) de um triângulo retângulo for 420m, quais são as medidas dos lados?

→ **Resolução:**

$$a = \frac{P}{4} = \frac{420}{4} = 105,\ b = \frac{P}{3} = \frac{420}{3} = 140 \text{ e}$$
$$c = \frac{5P}{12} = \frac{5x4200}{12} = 175$$

Os lados foram números inteiros (triângulo pitagórico) porque o perímetro é múltiplo de 12.

Verificação:
P = 105m + 140m + 175m = 420m
$a^2 + b^2 = c^2$
$(105)^2 + (140)^2 = (175)^2$
$11025 + 19600 = 30625$
$30625 = 30625$

PARTE XVII

COMO ACHAR TRIÂGULOS PITAGÓRICOS ISOPERIMÉTRICOS

Vimos na Parte VI, teorema (Sebá 4) que $\frac{P}{4}$, $\frac{P}{3}$ e $\frac{5P}{12}$ são as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Como entre todos os quadriláteros com o mesmo perímetro, o de área máxima é o quadrado, e entre todos os triângulos com o mesmo perímetro, o de área máxima é o triângulo equilátero, e como $\frac{P}{4}$ e $\frac{P}{3}$ são, respectivamente, as medidas dos lados do quadrado e do triângulo equilátero, logo, a área do triângulo retângulo é máxima para $a = \frac{P}{4}$ e $b = \frac{P}{3}$. Já que os perímetros do quadrado (P_Q), do triângulo equilátero (P_{TE}) e do triângulo retângulo (P_{TR}) são, respectivamente,

$$P_Q = 4(\frac{P}{4}),\ P_Q = 3(\frac{P}{3}), \text{ e } P_{TR} = \frac{P}{4} + \frac{P}{3} + \frac{5P}{12} = 12(\frac{P}{12}),$$

logo, $P_Q = P_{TE} = P_{TR}$.

Por outro lado, como P é o perímetro do triângulo retângulo e, além disso, $a = \frac{P}{4}$, $b = \frac{P}{3}$ e $c = \frac{5P}{12}$, logo, o triângulo retângulo só será pitagórico se P for um múltiplo de 12 (F.A.D.).

A fórmula que fornece dois ou mais triângulos pitagóricos isoperimétricos, caso existam, é a seguinte:

$$a = \frac{-k + \sqrt{k(k+4P)}}{2}$$

Na qual: a = cateto menor

P = perímetro

k = $1 \le k < \frac{5P}{12} - \frac{P}{3}$

OBS.: $k = \frac{5P}{12} - \frac{P}{3}$ é a diferença entre a hipotenusa (c) e o cateto maior (b).

Demonstração:

Já que as medidas dos lados de um triângulo pitagórico são a, b e c, logo:

a + b + c = P (1)

Como b = c – k e $c = \frac{a^2+k^2}{2k}$, logo, $b = \frac{a^2+k^2}{2k} - k = \frac{a^2-k^2}{2k}$

Substituindo os valores de b e c na (1), obtém-se:

$$a + \frac{a^2-k^2}{2k} + \frac{a^2+k^2}{2k} = P$$

$$\frac{2ka + a^2 - k^2 + a^2 + k^2}{2k} = P \quad (2)$$

Simplificando a (2), obtém-se:

$a^2 + ka - kP = 0$

$$a = \frac{-k \pm \sqrt{k(k+4P)}}{2}$$

Como “**a**” deve ser positivo, logo:

$$a = \frac{-k + \sqrt{k(k+4P)}}{2} \quad \text{(F.A.D.)}$$

Quantos triângulos pitagóricos isoperimétricos existem com perímetro (P) igual a 240cm?

→ **Resolução:**

Os valores de k são dados pelos divisores de P no intervalo $1 \leq k < \frac{5P}{12} - \frac{P}{4}$. Nesse intervalo podem existir dois ou mais triângulos pitagóricos isoperimétricos. Entre todos os triângulos pitágóricos que existirem, o de maior dimensão é o triângulo pitagórico de lados: $a = \frac{P}{4}$, $b = \frac{P}{3}$ e $c = \frac{5P}{12}$. Se existirem outros triângulos pitagóricos com P = 240, então, $c - b = k < \frac{5P}{12} - \frac{P}{4}$.

Como P = 240, logo, $a = \frac{240}{4} = 60$, $b = \frac{240}{3} = 80$ e $c = \frac{5x240}{12} = 100$.

Perímetro 60m + 100 = 240m

Já que c – b = k = 100 – 80 = 20, logo, o intervalo para k é: $1 \leq k < 20$.

Como os divisores de 240 < 20 são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 e 16, logo, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 ou 16.

Para k = 1, $a = \frac{-1 + \sqrt{1(1+4x240)}}{2} = 15$

$$c = \frac{15^2 + 1^2}{2x1} = 113 \text{ e } b = c - k = 113 - 1 = 112$$

(a, b, c) = (15, 112, 113)

Perímetro: 15cm + 112cm + 113cm = 240cm

Para k = 2, $a = \dfrac{-2 + \sqrt{2(2 + 4x240)}}{2} = 10{,}46$ (Não é cateto menor de um triângulo pitagórico).

Após testar os restantes dos ks, para k no intervalo: $3 \leq k < 20$, obteve-se os seguintes resultados para k = 8 e 12:

Para k = 8, $a = \dfrac{-8 + \sqrt{8(8 + 4x240)}}{2} = 40$

Cálculo da hipotenusa (c) e do cateto maior (b) para a = 40:

$$c = \frac{40^2 + 8^2}{2x8} = 104 \text{ e } b = c - k = 104 - 8 = 96$$

Perímetro: a + b + c = 40cm + 96cm + 104cm = 240cm

Para k = 12, $a = \dfrac{-12 + \sqrt{12(12 + 4x240)}}{2} = 48$

Cálculo da hipotenusa (c) e do cateto maior (b) para a = 48:

$$c = \frac{48^2 + 12^2}{2x12} = 102 \text{ e } b = c - k = 102 - 12 = 90$$

Perímetro: a + b + c = 48cm + 90cm + 102cm = 240cm

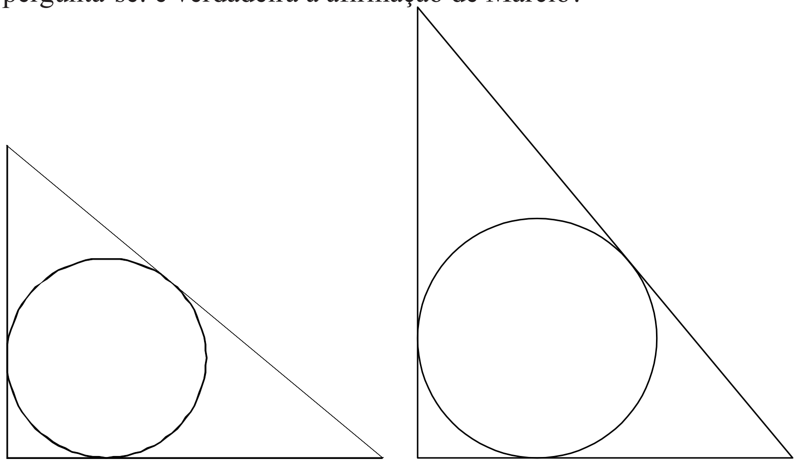
Resposta:

Para um perímetro igual 240cm, existem quatro triângulos pitagóricos isoperimétricos.

(60cm, 80cm, 100cm)
(15cm, 112cm, 113cm)
(40cm, 96cm, 104cm)
(48cm, 90cm, 102cm)

FLAGRANTE DA VIDA REAL

Marcos construiu um cacimbão com diâmetro igual a 8m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 60m. Márcio afirmou que também construiu um cacimbão com diâmetro igual a 10m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro também igual a 60m. Sabendo-se que tanto no cacimbão de Marco como no de Márcio cada lance de cerca é tangente às paredes do cacimbão, pergunta-se: é verdadeira a afirmação de Márcio?



CACIMBÃO DE MARCOS **CACIMBÃO DE MÁRCIO**

→ **Resolução:**

Como 60 é um múltiplo de 12, logo, pelo teorema (Sebá 9), as medidas do triângulo pitagórico são dadas por: $a = \dfrac{60}{4} = 15$, $b = \dfrac{60}{3} = 20$ e $c = \dfrac{5x60}{12} = 25$.

Triângulo pitagórico: (15, 20, 25)

Raio $= \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{15+20-25}{2} = 5$

Perímetro: 15m + 20m + 25m = 60m (Cacimbão de Márcio)

Se existir outro triângulo pitagórico com perímetro igual 60, ele tem que ter **a**< 15. Como k = c – b e c = 25 e b = 20, logo, k = 25 – 20 = 5. Portanto, o intervalo para k é: 1 ≤ k < 5.

Como os divisores de 60, no intervalo 1 ≤ k < 60, são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30, logo, 1 ≤ k < 5, k = 1, 2, 3, e 4.

Para k = 1, $a = \dfrac{-1+\sqrt{1(1+4x60)}}{2} = 7{,}73$ (Não é cateto menor de um triângulo pitagórico)

Para k = 2, $a = \dfrac{-2+\sqrt{2(2+4x60)}}{2} = 10$

$$c = \frac{10^2+2^2}{2x2} = 26$$ e b = c – k = 26 – 2 = 24

Triângulo pitagórico: (10, 24, 26)

Raio $= \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{10+24-26}{2} = 4$

Perímetro: 10m + 24m + 26m = 60m (Cacimbão de Marco)

Para k = 3, $a = \dfrac{-3+\sqrt{3(3+4x60)}}{2} = 12$

$c = \dfrac{12^2+3^2}{2x3} 25{,}5$ (Não é hipotenusa de um triângulo pitagórico)

Para k = 4, $a = \dfrac{-4+\sqrt{4(4+4x240)}}{2} = 13,62$ (Não é cateto menor de um triângulo pitagórico).

Resposta:

A afirmação de Márcio é verdadeira. E além de ser verdadeira, supondo que as

profundidades dos dois cacimbões sejam as mesmas, com a aplicação dos ternos pitagóricos, Márcio obteve um cacimbão com maior volume (Raio do cacimbão: 5m) de água (haja vista que o cacimbão de Marcos tem apenas 4m de raio) com a mesma quantidade de metros de cerca usada por Marcos, ou seja, usando 60 metros de cerca.

O quadro abaixo mostra os 26 perímetros com os respectivos triângulos pitagóricos isoperimétricos dado o perímetro múltiplo de 12:

Perímetro	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
60	10	24	26	15	20	25		—			—	
84	12	35	37	21	28	35		—			—	
120	20	48	52	24	45	51	30	40	50		—	
132	11	60	61	33	44	55		—			—	
168	21	72	75	24	70	74	42	56	70		—	
180	18	80	82	30	72	78	45	60	75		—	
240	15	112	113	40	96	104	48	90	102	60	80	100
252	36	105	111	63	84	105	56	90	106		—	
288	32	126	130	72	96	120		—			—	
300	50	120	130	75	100	125		—			—	
312	24	143	145	78	104	130		—			—	
336	42	144	150	48	140	148	84	112	140		—	
360	36	160	164	60	144	156	72	135	153	90	120	150
396	33	180	183	99	132	165		—			—	
420	28	195	197	60	175	185	70	168	182	105	140	175
480	30	224	226	80	192	208	96	180	204	120	160	200

504	63 216 225	72 210 222	126 168 210	—
540	54 240 246	90 216 234	135 180 225	—
660	55 300 305	60 297 303	165 220 275	—
672	84 288 300	96 280 296	168 224 280	—
720	45 336 339	72 320 328	180 240 300	—
924	42 440 442	77 420 427	231 308 385	—
1200	48 575 577 300 400 500	75 560 565	200 480 520	240 450 510
1260	35 612 613	84 585 591	315 420 525	—

Pelo quadro, nota-se, por exemplo, que para um perímetro de 240 metros, pode-se delimitar um terreno em forma de triângulo pitagórico de quatro maneiras diferentes:

(15m, 112m, 113m), (40m, 96m, 104m), (48m, 90m, 102m) e (60m, 80m, 100m).

Calculando a área de cada triângulo, obtém-se:

(15m, 112m, 113m): Área = $\dfrac{15x112}{2}$ = 840m^2

(40m, 96m, 104m): Área = $\dfrac{40x96}{2}$ = 1920m^2

(48m, 90m, 102m): Área = $\dfrac{48x90}{2}$ = 2160m^2

(60m, 80m, 100m): Área = $\dfrac{60x80}{2}$ =2400m^2

Conclusão

Com o perímetro (15m, 112m, 113m) obteve-se uma área de 840m^2. Com o mesmo perímetro (60m, 80m, 100m) obteve-se uma área de 2400m^2, ou seja, uma área quase três vezes maior.

PARTE XVIII

COMO ACHAR OS LADOS DE UM TRIÂNGULO PITAGÓRICO POR MEIO DA EQUAÇÃO DE FERMAT: $X^{2M} + Y^{2M} = Z^{2M}$ PARA M > 1

A equação de Fermat: $x^{2m} + y^{2m} = z^{2m}$ não tem solução em inteiros para 2m > 2, mas pode-se encontrar infinitas soluções para x inteiro e y, z não inteiros, por meio da equação de Sebá:

$$w^{2m} + \left(\frac{w^{2m-1} - w}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{w^{2m-1} + w}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$, w, n > 1 inteiros

√Exemplos de aplicação

1. Encontre duas soluções para a equação $x^4 + y^4 = z^4$ com x inteiro e y, z não inteiros.

→ **Resolução:**

a) Sejam w = 3 e 2m = 4

$$3^4 + \left(\frac{3^{4-1} - 3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3^{4-1} + 3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solução: x = 3, $y = \sqrt{12}$ (Irracional) e $z = \sqrt{15}$ (Irracional).

Verificação:

$$3^4 + \left(\sqrt{12}\right)^4 = \left(\sqrt{15}\right)^4$$

$3^4 + 12^2 = 15^2$

Como $3^4 = 9^2$, logo, (x, y, z) = (9, 12, 15) é um terno pitagórico.

b) Sejam w = 5 e 2m = 4

$$5^4 + \left(\frac{5^{4-1} - 5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5^{4-1} + 5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solução: x = 5, $y = \sqrt{60}$ (Irracional) e $z = \sqrt{65}$ (Irracional).

Verificação:

$$5^4 + \left(\sqrt{60}\right)^4 = \left(\sqrt{65}\right)^4$$

$5^4 + 60^2 = 65^2$

$5^4 = (5^2)^2$, logo, (x, y, z) = (25, 60, 65) é um terno pitagórico

2. Encontre duas soluções para a equação $x^6 + y^6 = z^6$ com x inteiro e y, z não inteiros.

→ **Resolução:**

a) Sejam w = 3 e 2m = 6

$$3^6 + \left(\frac{3^{6-1} - 3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3^{6-1} + 3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Solução:
x = 3, $y = \sqrt[3]{120}$ (Irracional) e $z = \sqrt[3]{123}$.(Irracional)

Verificação:

$$3^6 + \left(\sqrt[3]{120}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{123}\right)^6$$

$3^6 + 120^2 = 123^2$

Como $3^6 = 27^2$, logo, (x, y, z) = (27, 120, 123) é um terno pitagórico.

b) Sejam w = 2 e 2m = 6

$$2^6 + \left(\frac{2^{6-1}-2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2^{6-1}+2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Solução:
x = 2, $y = \sqrt[3]{15}$ (Irracional) e $z = \sqrt[3]{17}$.(Irracional)

Verificação:

$$2^6 + \left(\sqrt[3]{15}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{17}\right)^6$$

$2^6 + 15^2 = 17^2$

Como $2^6 = 8^2$, logo, (x, y, z) = (8, 15, 17) é um terno pitagórico.

3. Encontre solução para a equação $x^8 + y^8 = z^8$ com x inteiro e y, z não inteiros.

→ **Resolução:**

a) Sejam w = 2 e 2m = 8

Se escolhermos $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$, e substituirmos na equação de Sebá, obtém-se:

$$2^8 + \left(\frac{2^{8-1}-2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^{8-1}+2}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Solução:
x = 2, $y = \sqrt[4]{63}$ (Irracional) e $z = \sqrt[4]{65}$ (Irracional)

Verificação:

$$2^8 + \left(\sqrt[4]{63}\right)^8 = \left(\sqrt[4]{65}\right)^8$$

$2^8 + 63^2 = 65^2$

Como $2^8 = 16^2$, logo, $(x, y, z) = (16, 63, 65)$ é um terno pitagórico. Como $16 = 4^2$, logo, não existem triângulos pitagóricos com os catetos quadrados perfeitos, existem sim, triângulos pitagóricos com um dos catetos quadrados perfeitos

E assim por diante.

PARTE XIX

COMO ACHAR TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS COM ÁREA E PERÍMETRO NUMERICAMENTE IGUAIS

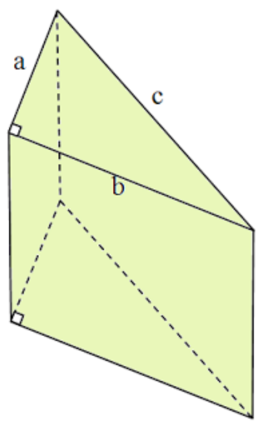
FLAGRANTE DA VIDA REAL I

Uma pessoa pretende confeccionar duas caixas cada uma com a base no formato de um triângulo pitagórico, obedecendo à seguinte condição: a área e o perímetro da base de cada caixa sejam numericamente iguais e, além disso, as medidas dos lados de cada base sejam números naturais. Pergunta-se: será que essa pessoa conseguirá alcançar seu objetivo?

TEOREMA DE SEBÁ -Existem apenas dois triângulos pitagóricos cujos valores numéricos da área e do perímetro são iguais.

Demonstração:

A figura abaixo é uma caixa com a base no formato de um triângulo pitagórico.



Sejam a < b < c, p e A, respectivamente, as medidas dos lados, o perímetro e a área de um triângulo retângulo. Assim temos:

$$p = a + b + c \qquad (1)$$

$$A = \frac{ab}{2} \qquad (2)$$

Quando a área for igual ao perímetro, temos: A = p (3)

Substituindo os valores da (1) e da (2) na (3), obtém-se:

$$\frac{ab}{2} = a + b + c \qquad (4)$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, logo, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (5)

Substituindo o valor da (5) na (4), obtém-se:

$$\frac{ab}{2} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ou } \frac{ab}{2} - (a + b) = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (6)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da (6), obtém-se:

$$\left(\frac{ab}{2} - (a + b)\right)^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2$$

$$\frac{a^2b^2}{4} - 2\left(\frac{ab}{2}\right)(a + b) + (a + b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{a^2b^2}{4} - a^2b - ab^2 + a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{a^2b^2}{4} - a^2b - ab^2 + 2ab = 0$$

$$a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 0$$

$$ab(ab - 4a - 4b + 8) = 0$$

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0$$

$$b(a - 4) = 4a - 8$$

$$b = \frac{4a - 8}{a - 4}\ 4 + \frac{8}{a - 4},\ a > 4 \qquad (7)$$

Tomando valores para **a**, no intervalo $4 < a < 7$, inteiros e positivos, e substituindo na (7), obtém-se os dois únicos triângulos pitagóricos.

Para a = 5, obtém-se: $b = 12$ e $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

Para a = 6, obtém-se: $b = 8$ e $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Resposta:

1º triângulo pitagórico: Dimensões: a = 5 u.c., b = 12 u.c. e c = 13 u.c. (unidade de comprimento)

Perímetro = 5 u.c. + 12 u.c. + 13 u.c. = **30 u.c.**

$$Área = \frac{5 \times 12}{2} = 30 \textbf{ u.a.} \text{ (unidade de área)}$$

2º triângulo pitagórico: Dimensões: a = 6 u.c., b = 8 u.c. e c = 10 u.c.

Perímetro = 6 u.c. + 8 u.c. + 10 u.c. = **24 u.c.**

$$Área = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \textbf{ u.a.}$$

Resposta:

Sim, é possível essa pessoa alcançar o seu objetivo.

FLAGRANTE DA VIDA REAL II

Rogério disse a Marcelo que havia construído um cacimbão com raio igual a 2m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 30m e área igual 30m². Marcelo afirmou a Rogério que também construiu um cacimbão com raio igual a 2m e cercou-o com três lances de cerca em forma de um triângulo pitagórico com perímetro igual a 24m e área igual 24m². Sabendo-se que tanto no cacimbão de Rogério como no de Marcelo cada lance de cerca é tangente às paredes do cacimbão, pergunta-se: são verdadeiras as afirmações de Rogério e Marcelo?

De acordo com o teorema de Sebá:

1º triângulo pitagórico: Dimensões: a = 5 u.c., b = 12 u.c. e c = 13 u.c. (unidade de comprimento).

2º triângulo pitagórico: Dimensões: a = 6 u.c., b = 10 u.c. e c = 12 u.c.

Raio do cacimbão de Rogério: $\dfrac{5 \; x \; 12}{5 + 12 + 13} = 2$

Raio do cacimbão de Marcelo: $\dfrac{5 \; x \; 12}{5 + 12 + 13} = 2$

Resposta:

Como os dois raios são iguais, logo, as afirmações de Rogério e Marcelo são verdadeiras. Mas, já que cada cacimbão tem o mesmo diâmetro, logo, Rogério gastou mais material, do que Marcelo, para cerca seu cacimbão, haja vista que o cacimbão de Rogério tem um perímetro de 30m e área 30m^2; enquanto o cacimbão de Marcelo tem um perímetro de 24m e área 24m^2.

PARTE XX

COMO ESCREVER UM NATURAL (PAR OU ÍMPAR) COMO DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

Em muitos livros de teoria dos números os autores mostram como escrever um número par ou ímpar como soma ou diferença de dois quadrados, mas não apresentam nem um problema com o qual o leitor (ou aluno) pode-se defrontar no seu dia-a-dia que seja necessário usar a soma ou diferença de dois quadrados para resolvê-lo. Vamos apresentar alguns exemplos, no item 21, relacionado com o triângulo pitagórico que para solucioná-lo é menos trabalhoso usar a diferença ou soma de dois quadrados do que extrair a raiz quadrada.

TEOREMA SEBÁ - Todo número P (par) > 4, múltiplo de 4, pode ser escrito como diferença de dois quadrados de inteiros, $P = x^2 - y^2$, de uma ou mais maneiras diferentes, por meio das duas equações:

$$x = \frac{P + k^2}{2k} \text{ e } y = x - k$$

Nas quais: k são os divisores de P, $k \neq 2n + 1$, $2 \leq k^2 < P$ e $2k$ tem que dividir P.

Demonstração:

Como $P = x^2 - y^2$, logo:

$$x + y = \frac{P}{x - y}$$

Como x e y são inteiros positivos, logo, $x - y$ são os divisores de P.

Se $x - y = k$, então:

$$x + y = \frac{P}{k}$$

Temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = k \\ x + y = \dfrac{P}{k} \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtém-se:

$$x = \frac{P + k^2}{2k} \text{ e } y = x - k$$

Note que se $k^2 \geq P$, implica $x - k \leq 0$, logo, $2 \leq k^2 < P$.

Se $k = 2n + 1$, $P + k^2$ será ímpar, consequentemente, $2k$ (par) não divide $P + k^2$(ímpar):

$P = 4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$

$P = k^2 + 2k + 1 - k^2 + 2k - 1$

$P = 4$

Exemplo 1: De quantas maneiras diferentes pode-se escrever $16 = x^2 - y^2$?

O divisor de 16, tal que $2 \leq k^2 < 16$, é: 2.

Para $k = 2$ e $P = 16$:

$$x = \frac{16 + 2^2}{2 \cdot 2} = 5 \quad \text{e} \quad y = 5 - 2 = 3$$

$$16 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9$$

Caso escolhêssemos $k = 4$, teríamos $k^2 = 4^2 = 16 = P$, e obter-se-ia:

$$x = \frac{16 + 4^2}{2 \cdot 4} = 16 \quad \text{e} \quad y = 16 - 16 = 0$$

Exemplo 2: De quantas maneiras diferentes pode-se escrever $32 = x^2 - y^2$?

Os divisores de 32, tal que $2 \leq k^2 < 32$, são : 2 e 4.

Logo, 32 pode ser escrito como diferença de dois quadrados de duas maneiras diferentes.

Para $k = 2$ e $P = 32$:

$$x = \frac{32 + 2^2}{2 \cdot 2} = 9 \quad \text{e} \quad y = 9 - 2 = 7$$

$$32 = 9^2 - 7^2 = 81 - 49$$

Para $k = 4$ e $P = 32$:

$$x = \frac{32 + 4^2}{2 \cdot 4} = 6 \quad \text{e} \quad y = 6 - 4 = 2$$

$$32 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4$$

Caso escolhêssemos $k = 8$ (um dos divisores de 32) teríamos $k^2 = 8^2 = 64 > P$, e obter-se-ia:

$$x = \frac{32 + 8^2}{2 \cdot 8} = 6 \quad \text{e} \quad y = 6 - 8 = -2 \ (\textit{negativo})$$

TEOREMA SEBA - Todo número ímpar (I), maior que a unidade, pode ser escrito como diferença de dois quadrados de inteiros: $I = x^2 - y^2$, de uma ou mais maneiras diferentes, por meio das duas equações:

$$x = \frac{I + k^2}{2k} \text{ e } y = x - k$$

Onde k são os divisores de I, tal que $1 \leq k^2 < I$.

Demonstração:

Como $I = x^2 - y^2$, logo:

$$x + y = \frac{I + k^2}{x - k}$$

Como x e y são inteiros positivos, logo, $x - y$ são os divisores de I.

Se $x - y = k$, então:

$$x + y = \frac{1}{k}$$

Temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = k \\ x + y = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtém-se:

$$x = \frac{I + k^2}{2k} \text{ e } y = x - k$$

Note que se $k^2 \geq I$, implica $x - k \leq 0$, logo, $1 \leq k^2 < I$.

Exemplo 1: De quantas maneiras diferentes pode-se escrever 121 $= x^2 - y^2$?

Os divisores de 121, tal que $1 \leq k^2 < 121$, é: 1. Logo, pode-se escrever $121 = x^2 - y^2$ de uma única maneira.

Para $k = 1$ e $I = 121$:

$$x = \frac{121 + 1^2}{2 \cdot 1} = 61 \quad \text{e} \quad y = 61 - 1 = 60$$

Assim:

$$121 = x^2 - y^2 = 61^2 - 60^2 = 3721 - 3600 = 121$$

Caso escolhêssemos $k = 11$, teríamos $k^2 = 11^2 = 121 = I$, e obter-se-ia:

$$x = \frac{121 + 11^2}{2 \cdot 11} = 11 \quad \text{e} \quad y = 11 - 11 = 0$$

Exemplo 2: De quantas maneiras diferentes pode-se escrever o primo $13 = x^2 - y^2$?

O divisor de 13, tal que $1 \leq k^2 < 13$, é: 1. Logo, pode-se escrever $13 = x^2 - y^2$ de um única maneira como diferença de dois quadrados. Para $k = 1$ e $I = 13$:

$$x = \frac{13 + 1^2}{2 \cdot 1} = 7 \quad \text{e} \quad y = 7 - 1 = 6$$

Assim:

$$13 = x^2 - y^2 = 72 - 62 = 49 - 36 = 13$$

Exemplo 3: De quantas maneiras diferentes pode-se escrever $117 = x^2 - y^2$?

Os divisores de 117, tal que $1 \leq k^2 < 117$, são: 1, 3 e 9. Logo, temos três maneiras diferentes de escrever 117 como diferença de dois quadrados.

Para $k = 1$ e $I = 117$:

$$x = \frac{117 + 1^2}{2 \cdot 1} = 59 \quad \text{e} \quad y = 59 - 1 = 58$$

Assim:

$$117 = 59^2 - 58^2$$

Para $k = 3$ e $I = 117$:

$$x = \frac{117 + 3^2}{2 \cdot 3} = 21 \quad \text{e} \quad y = 21 - 3 = 18$$

Logo:

$$117 = 21^2 - 18^2$$

Para $k = 9$ e $I = 117$:

$$x = \frac{117 + 9^2}{2 \cdot 9} = 11 \quad \text{e} \quad y = 11 - 9 = 2$$

Assim:

$$117 = 11^2 - 2^2$$

Caso escolhêssemos $k = 13$, teríamos $k^2 = 13^2 = 169 > 117$, e obter-se-ia:

$$x = \frac{117 + 13^2}{2 \cdot 13} = 11 \quad \text{e} \quad 11 - 13 = -2 \ (\textit{negativo})$$

PARTE XXI

DADAS AS MEDIDAS DOS CATETOS DE UM TRIÂNGULO PITAGÓRICO NÃO PRIMITIVO ACHAR A HIPOTENUSA SEM EXTRAIR A RAIZ QUADRADA

Exemplos

01) Sabendo-se que 16 e 30 são as medidas dos catetos de um triângulo pitagórico, ache o valor da hipotenusa sem extrair a raiz quadrada.

→ **Resolução:**

Já vimos que **a**, **b** e **c** são números inteiros e satisfaz a equação $a^2 + b^2 = c^2$, então, **a**, **b** e **c** são chamados de terno pitagórico, trio pitagórico ou terna pitagórica. Se o MDC (**a**, **b**) =1, então, o terno **a**, **b** e **c** é chamado terno pitagórico primitivo; e o triângulo retângulo abc é chamado triângulo pitagórico primitivo.Se o MDC (**a**, **b**) > 1, então, o terno **a**, **b** e **c** é chamado terno pitagórico não primitivo; e o triângulo retângulo abc é chamado triângulo pitagórico não primitivo.

Se**a**, **b** e **c** forem um terno pitagórico primitivo, então, **b** é par e **a** e **b** são ímpares. Se**a**, **b** e **c** forem um terno pitagórico não primitivo, então, o MDC(a, b) > 1.

Como 16 e 30 são as medidas dos catetos de um triângulo pitagórico e, além disso, MDC(16, 30) = 2 >1, logo, o terno (16, 30, c) é um terno pitagórico não primitivo.

O matemático Euclides criou fórmulas para gerar terno pitagórico primitivo e terno pitagórico não pitagórico.

Fórmulas que geram terno pitagórico primitivo

$a= x^2 – y^2$ (Um dos catetos)
$b = 2xy$ (O outro cateto)

$c = x^2 + y^2$ (hipotenusa)
$x > y$, x e y de paridades opostas, ou seja, um par e o outro ímpar

Fórmulas que geram terno pitagórico não primitivo

$a = x^2 - y^2$ (Um dos catetos)
$b = 2xy$ (O outro cateto)
$c = x^2 + y^2$ (hipotenusa)
$x > y$, x e y de mesma paridade , ou seja, os dois pares ou os dois ímpares

Como 16 (par) é divisível por 4, logo, o divisor de 16, tal que $2 \leq k^2 < 16$, é: 2.

Para $k = 2$ e $P = 16$:

$$x = \frac{16 + 2^2}{2 \cdot 2} = 5 \quad \text{e} \quad y = 5 - 2 = 3$$

$$a = 5^2 - 3^2 = 16$$
$$b = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$$
$$c = 5^2 + 3^2 = 34$$

Verificação:

$$16^2 + 30^2 = 34^2$$
$$1156 = 1156$$

Resposta:

O valor da hipotenusa é 30 e o terno pitagórico não primitivo é: (a, b, c) = (16, 30, 34).

1. Sabendo-se que 19 e 180 são as medidas dos catetos de um triângulo pitagórico , ache o valor da hipotenusa sem extrair a raiz quadrada.

→ **Resolução:**

Como 19 é primo, logo, o divisor de 19, tal que $1 \leq k^2 < 19$, é: 1.

Para $k = 1$ e I = 19:

$$x = \frac{19 + 1^2}{2 \cdot 1} = 10 \quad \text{e} \quad y = 10 - 1 = 9$$

$$a = 10^2 - 9^2 = 19$$
$$b = 2*10*9 = 180$$
$$c = 10^2 + 9^2 = 181$$

Verificação:

$$19^2 + 180^2 = 181^2$$
$$32761 = 32761$$

Resposta:

O valor da hipotenusa é 181 e o terno pitagórico primitivo é: (a, b, c) = (19, 180, 181).

PARTE XXII

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR QUALQUER NÚMERO PRIMO MAIOR QUE ONZE

Já que existem critérios de divisibilidade por 3, 5, 7, e 11, nestavigésima segunda parteé nosso objetivo mostrar uma regra de divisibilidade (ou Regra de Sebá) por qualquer número primo maior que 11. Já que existem as calculadoras, o trabalho não traz nenhuma contribuição prática para os leitores (ou alunos). Se o trabalho tivesse sido escrito numa época em que não existiam as calculadoras, com certeza, seria uma grande contribuição ao ensino da matemática. Escrevi o trabalho apenas como curiosidade.

Seja N o número dado e verificar se N é divisível por um número primo $p>11$.

Passo 1: Se p terminar em 3, 7 ou 9, multiplique p, respectivamente, por 7, 3 e 9, subtraia 1 e divida a diferença por 10; Se p terminar em 1, subtraia 1 de p e divida a diferença por 10. Esses quocientes vamos designar por y.

Passo 2: Multiplique y pelo último algarismo de N e subtraia de N sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se é divisível por p, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por p.

Observação: Se o último algarismo da diferença vezes y for maior que o número sem o último algarismo, encerra-se o processo, e verifica se a diferença é divisível por p.

Fórmulas Para Critérios de Divisibilidade

1) $y = \frac{p-1}{10}$ (se p terminar em 1)

2) $y = \frac{7p-1}{10}$ (se p terminar em 3)

3) $y = \frac{3p-1}{10}$ (se p terminar em 7)

3) $y = \frac{3p-1^2}{10}$ (se p terminar em 7)

4) $y = \frac{9p-1}{10}$ (se p terminar em 9)

Exemplo 1: Verificar se $N = 28561$ é divisível por $p = 13$.

Passo 1: Como p termina em 3, vamos utilizar a 2ª fórmula:

$$y = \frac{7p-1}{10} = \frac{7 \cdot 13 - 1}{10} = 9$$

Passo 2: Vamos chamar de u o último algarismo do número N. Desta forma, para o $N = 28561$, teremos $u = 1$. Assim, multipliquemos y por u, obtém-se:

$$y \cdot u = 9 \cdot 1 = 9$$

Agora, tomemos o número N sem o último algarismo e subtraíamos deste, o resultado de $y \cdot u$, obtendo: 28561 ► N – y · u ► 2856 – 9 · 1 = 2847 ► 2847 – 9 · 7 = 221 ► 22 – 9.1 = 13. Como a diferença é divisível por 13, logo, 28561 é divisível por 13.

O curioso é que as diferenças 2847 e 221 são divisíveis por 13:

$$\frac{2847}{13} = 219 \quad \text{e} \quad \frac{221}{13} = 17$$

Exemplo 2: Verificar se $N = 12167$ é divisível por $p = 23$.

Passo 1: como p termina em 3, use a 2ª fórmula:

$$y = \frac{7p - 1}{10} = \frac{7 \cdot 23 - 1}{10} = 16$$

Passo 2: Chamemos de u o último algarismo do número N. Desta forma, para o $N = 12167$, teremos $u = 7$. Assim, multiplicando y por u, obtém-se:

$$y \cdot u = 16 \cdot 7 = 112$$

Agora, tomemos o número N sem o último algarismo e subtraíamos 112 dele, obtém-se:

1216	Número N sem o último algarismo
– 112	Último algarismo de N vezes y
1104	Diferença

Como 1104 ainda é um número grande, repitamos o processo:

110	Número sem o último algarismo
– 64	4 (último algarismo) vezes 16
46	Diferença

Como o último algarismo da diferença é 6 e $y = 16$, logo, $6y = 6 * 16 = 96 > 4$ (número sem o último algarismo). Encerra-se o processo. Já que 46 é divisível por 23, logo, 12167 é divisível por 23. Caso repetíssemos o processo com a diferença 46, teríamos:

4	Número sem o último algarismo
– 96	6 (último algarismo) vezes 16
– 92	Diferença

A diferença (– 92) também é divisível por 23, mas aumentamos o tempo computacional, acrescentando mais uma operação.

Dispositivo Prático:

$$
\begin{array}{rl}
1216\mathbf{7} & \textbf{(Último algarismo)} \\
-\ 112 & \text{(Último algarismo vezes 16)} \\
\hline
110\mathbf{4} & \textbf{(Último algarismo)} \\
-\ 64 & \text{(Último algarismo vezes 16)} \\
\hline
46 &
\end{array}
$$

Exemplo 3: Verificar se $N = 923521$ é divisível por $p = 31$.

Passo 1: Como p termina em 1, usaremos a 1ª fórmula:

$$y = \frac{p-1}{10} = \frac{31-1}{10} = 3$$

Passo 2: Vamos utilizar o dispositivo prático:

$$
\begin{array}{r}
92352\mathbf{1} \\
-\ 3 \\
\hline
9234\mathbf{9} \\
-\ 27 \\
\hline
920\mathbf{7} \\
-\ 21 \\
\hline
89\mathbf{9} \\
-\ 27 \\
\hline
6\mathbf{2} \\
-\ 6 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Como a diferença é divisível por 31, logo, 923521 é divisível por 31.

Exemplo 4: Verificar se $N = 68921$ é divisível por $p = 41$.

Passo 1: como p termina em 3, usaremos a 1ª fórmula:

$$y = \frac{p-1}{10} = \frac{41-1}{10} = 4$$

Passo 2: Vamos utilizar o dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 6892\mathbf{1} \\ -4 \\ \hline 688\mathbf{8} \\ -32 \\ \hline 656\mathbf{6} \\ -24 \\ \hline 41 \end{array}$$

Como a diferença é divisível por 41, logo, 68921 é divisível por 41.

Exemplo 5: Verificar se $N = 83521$ é divisível por $p = 17$.

Passo 1: como p termina em 7, usaremos a 3ª fórmula:

$$y = \frac{3p - 1}{10} = \frac{3 \cdot 17 - 1}{10} = 5$$

Passo 2: Vamos utilizar o dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 8352\mathbf{1} \\ -5 \\ \hline 834\mathbf{7} \\ -35 \\ \hline 79\mathbf{9} \\ -45 \\ \hline 34 \end{array}$$

Como o último algarismo da diferença é 4 e $y = 5$, logo, 4 *5 = 20 > 3. Encerra-se o processo. Já que 34 é divisível por 17, logo, 83521 é divisível por 17. Caso repetíssemos o processo, teríamos:

$$\begin{array}{r} 3\mathbf{4} \\ -\,20 \\ \hline -\,17 \end{array}$$

A diferença (–17) também é divisível por 17, mas aumentamos o tempo computacional.

Exemplo 6: Verificar se $N = 50653$ é divisível por $p = 37$.

Passo 1: como p termina em 7, usaremos a 3ª fórmula:

Passo 2: Vamos utilizar o dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 5065\mathbf{3} \\ -\,33 \\ \hline 503\mathbf{2} \\ -\,22 \\ \hline 48\mathbf{1} \\ -\,11 \\ \hline 37 \end{array}$$

Como a diferença (37) é divisível por 37, logo, 50653 é divisível por 37.

Exemplo 7: Verificar se $N = 130321$ é divisível por $p = 19$.

Passo 1: Como p termina em 9, utilizaremos a 4ª fórmula:

$$y = \frac{9p - 1}{10} = \frac{9 \cdot 19 - 1}{10} = 17$$

Passo 2: Vamos utilizar o dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 13032\mathbf{1} \\ -\ 17 \\ \hline 1301\mathbf{5} \\ -\ 85 \\ \hline 121\mathbf{6} \\ -\ 102 \\ \hline 19 \end{array}$$

Como a diferença (19) é divisível por 19, logo, 130321 é divisível por 19.

Exemplo 8: Verificar se $N = 707281$ é divisível por $p = 29$.

Passo 1: como p termina em, use a 4ª fórmula:

$$y = \frac{9p - 1}{10} = \frac{9 \cdot 29 - 1}{10} = 26$$

Passo 2: Vamos utilizar o dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} 70728\mathbf{1} \\ -\ 26 \\ \hline 7070\mathbf{2} \\ -\ 52 \\ \hline 701\mathbf{8} \\ -\ 208 \\ \hline 4\mathbf{93} \\ -\ 78 \\ \hline 29 \end{array}$$

Como a diferença (– 29) é divisível por 29, logo, o número 707281 é divisível por 29. Note que o último algarismo da 3ª diferença é 3 e $y = 26$, logo:$3*26 = 78 > 49$. Deveríamos encerrar o processo.

Se tivéssemos encerrado o processo na terceira diferença, teríamos que verificar se 29 divide 493. Sem calculadora gastaríamos mais tempo na divisão do que subtrair 78 de 49. Foi por isso que continuamos o processo.

Demonstração do Teorema de Sebá

Teorema de Sebá – "Seja N o número dado e verificar se N é divisível por um número primo $p > 11$.

Passo 1: Se p terminar em 3, 7 ou 9, multiplique p, respectivamente, por 7, 3 e 9, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Se p terminar em 1, subtraia p de 1 e divida a diferença por 10. Ambos os quocientes vamos designar por y.

Passo 2: Multiplique y pelo último algarismo de N e subtraia de N sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se é divisível por p, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por p."

p termina em 1

Passo 1:"subtraia p de 1 e divida a diferença por 10. Tal quociente será chamado de y."

Passo 2: Multiplique y pelo último algarismo de N e subtraia de N sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se é divisível por p, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por p."

Proposição:

Considere o numero natural $N = \overline{a_0 a_1 ... a_k}$, em que $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a_0 \neq 0$ e seja p um número natural primo que termina em 1. Se $p \mid \left(\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1}} - y\right)$, então $p \mid N$, em que $y = \left(\frac{p-1}{10}\right) \cdot a_k$.

Demonstração

Como $p \mid \left(\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1}} - y\right)$, isto é, $p \left| \left[\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1}} - \left(\frac{p-1}{10}\right) \cdot a_k\right]\right.$, então:

$p|(a_0 a_1 ... a_{k-1} 0 - p \cdot a_k + a_k) \Rightarrow p|(a_0 a_1 ... a_{k-1} - p \cdot a_k + a_k) \Rightarrow p|(N - p \cdot a_k) \Rightarrow p|N$

***p* termina em 3**

Passo 1: "Se p terminar em 3, multiplique p por 7, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Se p terminar em 1, subtraia p de 1 e divida a diferença por 10. Tal quociente será chamado de y.

Passo 2: Multiplique y pelo último algarismo de N e subtraia de N sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se é divisível por p, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por p."

Proposição:

Considere o numero natural $N = \overline{a_0 a_1 ... a_k}$, em que $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a_0 \neq 0$ e seja p um número natural primo que termina em 3. Se $p \mid \left(\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1}} - y\right)$, então $p \mid N$, em que $y = \left(\frac{7p-1}{10}\right) \cdot a_k$.

Demonstração

Como $p\left|\left(\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1}} - y\right)\right.$, isto é, $p\left\|\left[\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1}} - \left(\dfrac{7p-1}{10}\right)\cdot a_k\right]\right.$, então:

$$p\left|\left(\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1}0} - 7p \cdot a_k + a_k\right)\right. \Rightarrow p\left|\left(\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1} a_k} - 7p \cdot a_k\right)\right. \Rightarrow p\left|\left(N - 7p \cdot a_k\right)\right. \Rightarrow p|N$$

***p* termina em 7**

Passo 1: “Se p terminar em 7, multiplique p por 3, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Se p terminar em 1, subtraia p de 1 e divida a diferença por 10. Tal quociente será chamado de y.

Passo 2: Multiplique y pelo último algarismo de N e subtraia de N sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se é divisível por p, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por p.”

Proposição: Considere o numero natural $N = \overline{a_0 a_1 \ldots a_k}$, em que $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $a_0 \neq 0$ e seja p um número natural primo que termina em 7. Se $\mathrm{p}\left|\left(a_0 a_1 \ldots a_{k-1} - y\right)\right.$, então $p|N$, em que $y = \left(\dfrac{3p-1}{10}\right)\cdot a_k$.

Demonstração

Como $p|(a_0 a_1 \ldots a_{k-1} - y)$, isto é, $p\left\|\left[\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1}} - \left(\dfrac{3p-1}{10}\right)\cdot a_k\right]\right.$, então:

$$p|(\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1}0} - 3p \cdot a_k + a_k) \Rightarrow p|(\overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1} a_k} - 3p \cdot a_k) \Rightarrow p|(N - 3p \cdot a_k) \Rightarrow p|N$$

p termina em 9

Passo 1: "Se p terminar em 9, multiplique p por 9, subtraia de 1 e divida a diferença por 10. Se p terminar em 1, subtraia p de 1 e divida a diferença por 10. Tal quociente será chamado de y.

Passo 2: Multiplique y pelo último algarismo de N e subtraia de N sem o último algarismo. Se a diferença for grande, de tal maneira que não seja possível reconhecer facilmente se é divisível por p, repete-se o processo até que seja possível reconhecer facilmente a divisão por p."

Proposição: Considere o numero natural $N = \overline{a_0 a_1 ... a_k}$, em que $a_0, a_1, ..., a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a_0 \neq 0$ e seja p um número natural primo que termina em 9. Se $\mathrm{p} \left| \left(a_0 a_1 ... a_{k-1} - y \right) \right.$, então $p|N$, em que $y = \left(\frac{9p - 1}{10} \right) \cdot a_k$.

Demonstração:

Como $p|(a_0 a_1 ... a_{k-1} - y)$, isto é, $p \left| \left[\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1}} - \left(\frac{9p-1}{10} \right) \cdot a_k \right] \right.$, então:

$$p|(\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1} 0} - 9p \cdot a_k + a_k) \Rightarrow p|(\overline{a_0 a_1 ... a_{k-1} a_k} - 9p \cdot a_k) \Rightarrow p|(N - 9p \cdot a_k) \Rightarrow p|N$$

PARTE XXIII

O CRIVO DE ERATÓSTENES VERSUS MÉTODO DE SEBÁ

Vamos mostrar por meio de exemplos numéricos a vantagem de usar o método de Sebá em vez do crivo de Eratóstenes levando-se em consideração o tempo gasto para elaborar um quadro com 10 linhas e 10 colunas e preenchê-la com os números de 2 a 100. Pelo método de Sebá, basta elaborar uma tabela com 4 linhas e 10 colunas.

O crivo de Eratóstenes é um processo criado pelo grego Eratóstenes, chefe da biblioteca de Alexandria, que nos permite encontrar vários números primos a partir do 2. Por exemplo, usando o crivo de Eratóstenes encontre os números primos entre 1 e 100.

1º passo: lista-se os números naturais em ordem crescente de 2 até 100 (o 1 não é primo!).

Quadro 1

XX	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2º passo: retiram-se da tabela 1 todos os múltiplos de 2, maiores que 2, ou seja:

4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, e 100, que não são números primos, pois são números pares.

Quadro 2

XX	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

3º passo: retiram-se do quadro 2 todos os múltiplos de 3, maiores que 3, ou seja:

9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99, que também não são primos, pois são divisíveis por 3.

Quadro 3

XX	2	3		5		7			
11		13		15		17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	
		53		55				59	
61				65		67			
71		73				77		79	
		83		85				89	
91				95		97			

4º passo: retiram-se da tabela todos os múltiplos de 5, maiores que 5, ou seja: 25,35,55,65,85,95.

Quadro 4

XX	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73				77		79	
		83						89	
91						97			

5º passo: retiram-se da tabela 4 todos os múltiplos de 7, maiores que 7, ou seja: 49,77,91.

Quadro 5

XX	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

Por que se para no primo 7? Porque só se considera os primos menores que raiz quadrada de N,ou seja, se N = 100, então, raiz quadrada de 100 é 10.

Portanto, os números que restaram na tabela 5 são os números primos maiores que 1 e menores que 100. Os quais são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Método de Sebá para Encontrar os Primos (p) no Intervalo 1 < p < 100

1º passo: elabora-se uma tabela com 3 linhas e 14 colunas;

2º passo: divide-se 100 por 3 e em seguida escreve-se na 1ª casela da 1ª linha os números ímpares (excluindo o 5 e os números de dois algarismos terminados em 5) até 33 que é o quociente de 100/3;

3º passo: escreve-se o 3 na 1ª casela da 2ª linha e em seguida multiplica-o pelos números ímpares da 1ª linha;

4º passo: divide-se 100 por 7 e em seguida escreve-se o 7 na 1ª casela da 3ª linha e multiplica-o pelos números ímpares (da 1ª linha) menores que o quociente de 100/7;

	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33
3	9	**21**	27	33	39	51	57	**63**	69	81	87	93	99
7	**21**	49	**63**	77	91	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX	XXX

5º passo: o 2 seguido dos números ímpares que não constam nas 2ª e 3ª linhas (excluindo os números ímpares de dois algarismos terminados em 5) são os números primos no intervalo 1 < P < 100. Os quais são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

✓ Conclusão

Entre 1 e 100 existem 25 números primos.

PARTE XXIV

NÚMEROS NATURAIS ANTIPITAGÓRICOS

Lendo o livro **As Maravilhas da Matemática**, 2ª edição, de autoria de Malba Tahan (pseudônimo do matemático brasileiro Júlio César de Mello e Souza falecido no dia 18 de junho de 1974, p.79), na qual é abordado ternos pitagóricos primitivos, o autor escreveu:

"O mesmo elemento pode figurar em dois ou mais ternos pitagóricos primitivos". Assim, o elemento 5 figura em dois ternos: 3, 4, 5

5, 12, 13

O elemento 85 pode ser encontrado em três ternos pitagóricos primitivos:

36, 77, 85
13, 84, 85
85, 132, 157

O elemento 60 figura em quatro ternos pitagóricos primitivos:

11, 60, 61
60, 91, 109
60, 201, 229
60, 809, 901

Há números naturais que não figuram em nenhum terno pitagórico. Citemos os seguintes: 47, 59, 67, 71, 79 etc. A esses números é dada a denominação de números antipitagóricos".

Diante do exposto, nosso objetivo é mostrar, que o autor cometeu um "lapsu calami" ao afirmar que os número 47, 59, 67, 71, 79 etc não figuram em nenhum terno pitagórico. É o que veremos a seguir.

Se os três números naturais **a**, **b** e **c** satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$, então, **a**, **b** e **c** são chamados ternos pitagóricos. Existem dois tipos de ternos pitagóricos: ternos pitagóricos primitivos, quando o MDC(a, b) = 1 e ternos pitagóricos não primitivos, quando o MDC(a, b) > 1. Existem três fórmulas desenvolvidas por Euclides, as quais geram apenas ternos pitagóricos primitivos. São elas:

$$a = x^2 - y^2 \text{ (um dos catetos)}$$
$$b = 2.x.y \text{ (o outro cateto)}$$
$$c = x^2 + y^2 \text{ (hipotenusa)}$$

Onde: x, y e z números naturais, $x > y$, x e y de paridades opostas um par e o outro ímpar.

Segundo Fermat, todo primo da forma $4x + 1$ pode ser escrito como soma de dois quadrados de inteiros de maneira única.

Portanto, se **a**, **b** e **c** forem um terno pitagórico primitivo, então, **c** é um primo (p) da forma $4x + 1$ ou um composto (C) da forma $p_1.p_2.p_3 \ldots p_n$, onde p_1, p_2, p_3, p_n são primos da forma $4x + 1$.

Exemplos

Se $p = 4x + 1$, então:
Para $x = 1$, implica, $p_1 = 5$
Para $x = 3$, implica, $p_2 = 13$

$P_1 = 5 = 2^2 + 1^2$ e $p_2 = 13 = 3^2 + 2^2$
$a = x^2 - y^2 = 2^2 - 1^2 = 3$
$b = 2xy = 2.2.1 = 4$
$c = x^2 + y^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

O trio (a, b, c) = (3, 4, 5) é um terno pitagórico primitivo, haja vista que MDC(3, 4) =1.

$a = x^2 - y^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

$b = 2xy = 2.3.2 = 12$

$c = x^2 + y^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

O trio (a, b, c) = (5, 12, 13) é um terno pitagórico primitivo, haja vista que MDC(5, 12) =1.

$C = p_1.p_2 = 5.13 = 65 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2)$.

Aplicando números complexos, obtém-se:

$(2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2) = (2+i) \cdot (3+2i)= 4 + 7i$. Logo, x = 7 e y = 4.

Portanto: $65 = 7^2 + 4^2$.

$a = x^2 - y^2 = 7^2 - 4^2 =33$

$b = 2xy = 2.7.4 =56$

$c = x^2 + y^2 = 7^2 + 4^2 = 65$

O trio (a, b, c) = (33, 56, 65) é um terno pitagórico primitivo, haja vista que MDC(33, 56) = 1.

Será que existe outra maneira de escrever 65 como soma de dois quadrados de inteiros? Vejamos:

Trocando o sinal de 2 + i ou de 3 + 2i. Troquemos o sinal de 2 + i:

$$(2 - i)(3 + 2i) = 8 + i$$
$$65 = 8^2 + 1^2$$

✓ Conclusão

O número 65 pode ser escrito como soma de dois quadrados de inteiros de duas maneiras distintas: $65 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$

Usando as fórmulas de Euclides mais uma vez, obtém-se:

$a = x^2 - y^2 = 8^2 - 1^2 = 63$
$b = 2xy = 2 \cdot 8 \cdot 1 = 16$
$c = x^2 + y^2 = 8^2 + 1^2 = 65$

O trio (a, b, c) = (63, 16, 65) é também um terno pitagórico primitivo, haja vista que MDC(63, 16) =1.

Pode-se encontrar, por meio das fórmulas de Euclides, ternos pitagóricos não primitivos; basta multiplicar cada equação por um natural $k > 1$.

$a = (x^2 - y^2)k$
$b = (2 \cdot x \cdot y)k$
$c = (x^2 + y^2)k$

Como $c = (x^2 + y^2)k$, logo, "c" é um composto tal que na sua fatoração exista pelo menos um natural (primo ou composto) que possa ser escrito com soma de dois quadrados de inteiros.

Por exemplo: o natural 15 pode ser hipotenusa de um triângulo retângulo? Sim!... Porque os fatores primos de 15 são 3 e 5 e, além disso, $5 = 2^2 + 1^2$, então, 15 é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Se não, vejamos:

$a = (2^2 - 1^2)3 = 9$
$b = (2 \cdot 2 \cdot 1)3 = 12$
$c = (2^2 + 1^2)3 = 15$

O trio (a, b, c) = (9, 12, 15) é um terno pitagórico, mas não é primitivo, haja vista que MDC(9, 12) > 1.

Por exemplo: o natural 40 pode ser hipotenusa de um triângulo retângulo? Sim!... Porque os fatores primos de 40 são 2, 2, 2 e 5 e $40 = (2.5)(2.2) = 10 \cdot 4 = (3^2 + 1^2)4$; então, 40 é a hipotenusa de um triângulo pitagórico. Se não, vejamos:

$a = (2^2 - 1^2)8 = 24$
$b = (2 \cdot 2 \cdot 1)8 = 32$
$c = (2^2 + 1^2)8 = 40$

O trio (a, b, c) = (24, 32, 40) é um terno pitagórico, mas não é primitivo, haja vista que MDC(24, 32) > 1.

Quais são os números naturais que não podem ser hipotenusa de nenhum triângulo retângulo?

Segundo Fermat, nenhum primo da forma 4x +3 pode ser escrito como soma de dois quadrados de inteiros.Logo, nenhum natural composto cujos fatores primos sejam todos da forma 4x + 3, não podem ser hipotenusa de nenhum triângulo pitagórico.

Esses números naturais eu os batizei com o nome: números antipitagóricos.

Quais são os números naturais antipitagóricos maiores que 1 e menores que 100? Escrevendo os números naturais de 1 a 100, obtém-se:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 6, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

Vejamos quais os números primos da forma 4x + 1 e 4x + 3 maiores que 1 e menores que 100:

x	4x + 1	4x + 3
0	1	3
1	5	7
2	9	11
3	13	15
4	17	19
5	21	23
6	25	27
7	29	31
8	33	35
9	37	39

10	41	43
11	45	47
12	49	51
13	53	55
14	57	59
15	61	63
16	65	67
17	69	71
18	73	75
19	77	79
20	81	83
21	85	87
22	89	91
23	93	95
24	97	99

Números primos da forma $4x + 1$: 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89 e 97

Números primos da forma $4x + 3$: 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71,79 e 83.

Resta saber quais dos números ímpares e pares compostos, menores que 100, que podem ser hipotenusa de um triângulo retângulo e quais os que não podem ser hipotenusa de um triângulo retângulo.

Números ímpares compostos, menores que 100, que podem ser hipotenusa de um triângulo retângulo:

$15 = (2^2 + 1^2)3$

$35 = (2^2 + 1^2)7$

$39 = (3^2 + 2^2)3$

$45 = (2^2 + 1^2)9$

$51 = (4^2 + 1^2)3$

$55 = (2^2 + 1^2)11$

$65 = (2^2 + 1^2)13$ ou $65 = (3^2 + 2^2)5$

$75 = (2^2 + 1^2)25$ ou $(4^2 + 3^2)5$

$85 = (2^2 + 1^2)17$ ou $85 = (4^2 + 1^2)5$

$87 = (5^2 + 2^2)3$

$91 = (3^2 + 2^2)7$
$95 = (2^2 + 1^2)19$

Números ímpares compostos, menores que 100, que não podem ser hipotenusa de um triângulo retângulo:

9, 21, 33,49, 57, 69, 77, 81, 93, 27, 93, 63, 99.

Números pares compostos, menores que 100, que podem ser hipotenusa de um triângulo retângulo:

$10 = (2^2 + 1^2)2 = 3^2 + 1^2$
$20 = (2^2 + 1^2)4$
$26 = (3^2 + 2^2)2$
$30 = (2^2 + 1^2)6$
$34 = (4^2 + 1^2)2$
$40 = (2^2 + 1^2)8$
$50 = (2^2 + 1^2)10$ ou $50 = (3^2 + 1^2)5$
$52 = (3^2 + 2^2)4$
$58 = (5^2 + 2^2)2$
$60 = (2^2 + 1^2)12$
$68 = (4^2 + 1^2)4$
$70 = (2^2 + 1^2)14$ ou $70 = (3^2 + 1^2)7$
$74 = (6^2 + 1^2)2$
$78 = (3^2 + 2^2)6$
$80 = (2^2 + 1^2)16$
$82 = (5^2 + 4^2)2$
$90 = (2^2 + 1^2)18$

Números pares compostos, menores que 100, que não podem ser hipotenusa de um triângulo retângulo:

4, 6, 8, 12, 14, 16, 22, 24, 28, 32, 36, 38, 42, 44, 46, 48, 54, 56, 62, 64, 66, 72, 76, 84, 86, 88, 92, 94, 96 e 98.

Conclusão

Os números naturais antipitagóricos, maiores que 1 e menores que 100, são:

4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 36, 38, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 54, 56, 57, 59, 62, 63, 64, 66, 67, 69, 71, 72, 76, 77, 79, 81, 83, 84, 86, 88, 92, 93, 94, 96, 98 e 99.

Portanto, entre 3 e 100, há 54 números naturais antipitagóricos.

Os números naturais 47, 59, 67, 71, 79 etc., não figuram em nenhum terno pitagórico, como o maior elemento (hipotenusa), mas figuram em qualquer terno pitagórico como o menor elemento (cateto menor). Se não, vejamos:

47, 1104, 1105

59, 1740, 1741

67, 2244, 2245

E assim sucessivamente.

Pode-se afirmar que: todo número natural maior ou igual a três figura em qualquer terno pitagórico.

PARTE XXV

OS DIVISORES DE UM NÚMERO NAS ATIVIDADESDE DOIS AGRICULTORES

Qual o interesse que o leitor (ou aluno) tem em aprender como achar o número de divisores de um número se o professor não mostra aos alunos a utilidade que eles têm na vida real de cada um?

Descobrimos duas propriedades interessantes nos divisores de um número, as quais podem ser usadas em situações da vida real do aluno.

Propriedade 1 – Sejam a, b, c e d quatro algarismos distintos. Com os divisores de um algarismo formemos os números com dois algarismos ab e cd, onde **a** e **c** são as dezenas dos números ab e cd e **b** e **d** são as unidades. Se a*c for igual a b*d, então, ab*cd = ba*dc. (* é o símbolo de multiplicação).

Vejamos um exemplo:

Os divisores de 24 são; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24.

Com os divisores 1, 6, 2 e 3 formemos os números: 13 e 26. As dezenas de 13 e 62 são 1 e 6 e as unidades são 3 e 2. Como 1*6= 3*2, logo, 13*62 = 31*26, ou seja, 806 = 806.

Com os divisores 2, 1, 4 e 8 formemos os números: 21 e 48. As dezenas de 21 e 48 são 2 e 4 e as unidades são 1 e 8. Como 2*4= 1*8, logo, 21*48 = 12*84, ou seja, 1008 = 1008.

Com os divisores 3, 2, 4 e 6 formemos os números: 32 e 46. As dezenas de 32 e 46 são 3 e 4 e as unidades são 2 e 6. Como 3*4= 6*2, logo, 32*46 = 64*23, ou seja, 1472= 1472.

Com os divisores 3, 4, 6 e 8 formemos os números: 36 e 84. As dezenas de 36 e 84 são 3 e 8 e as unidades são 6 e 4. Como 3*8= 6*4, logo, 36*84 = 48*63, ou seja, 3024 = 3024.

Propriedade 2 – Seja ab ≠ cd os divisores, com dois algarismos, de um dado número natural, sendo **a** e **c** as dezenas dos números ab e cd; e **b** e **d,** as unidades. Se a*c for igual a b*d, então, ab*cd = ba*dc.

Vejamos um exemplo:

Os divisores de 36 com a propriedade 2 são os números 12 e 36, haja vista que os algarismos daunidades são 1 e 6; e os da dezenas são 2 e 3. Como 1*6 = 2*3, logo, 12 x 63 = 21*36, ou seja, 756 = 756.

Você, caro leitor, pode estar perguntando a si mesmo: "Em que situação da vida real o aluno vai precisar usar as propriedades acima? É o que veremos a seguir.

FLAGRANTE DA VIDA REAL

O pai de João e José deixou como herança, dois terrenos retangulares cada um com área igual a 1148m^2. João cercou o seu terreno com sete lances de arame farpado e deixou dois metros para colocar uma cancela. Cada lance de cerca tinha 190m (192m – 2m) de comprimento; José disse a João que também cercou o seu terreno com sete lances de arame farpado e deixou dois metros para colocar uma cancela. Só que cada lance de cerca tinha 136m (138m – 2m) de comprimento. José está dizendo a verdade ou ele está mentindo?

→ **Resolução:**

Os divisores de 1148, área de cada terreno, são: 1, 2, 4, 7, 14, 28, 41, 82, 164 e 287, 574 e 1148. Pelas duas propriedades os divisores 164, 287, 524 e 1148 não servem, haja vista que cada um deles tem mais de dois algarismos. Os divisores, de um só algarismo, 1, 2, 4, 7 também não servem, haja vista que eles não estão de acordo com a propriedade 1. Os divisores 14, 82, 41 e 28, estão de acordo com a propriedade 2, haja vista que o produto das unidades de 14 e 82 é igual ao produto das unidades de 41 e 28, ou seja, 4*2 = 1*8. Logo, 41*28 = 82*14 = 1148.

Terreno de José
Área: 41*28 = 1148m^2
Perímetro: 2* 41 + 2*28 = 138 metros

Terreno de João
Área: 14*82 = 1148m^2
Perímetro: 2* 14 + 2*82 = 192 metros

✓ Conclusão

José está dizendo a verdade e, além disso, como em cada lance de cerca João gastou 190 metros de arame (192 – 2), logo, em sete lances gastou: 7 x 190 = 1330 metros. Como em cada lance de cerca José gastou 136 metros de arame (138 – 2), logo, em sete lances gastou 7 x 136 = 952 metros. Com a aplicação dos divisores de um número, José economizou 378 metros de arame, ou seja, 1330m – 952m.

PARTE XXVI

QUANTOS NÚMEROS PRIMOS EXISTEM?

Euclides demonstrou que existem infinitos primos. A demonstração de Euclides é muito simples, se não, vejamos:

Suponha, por absurdo, que o número de primos seja finito e sejam $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ primos.

Seja P um número tal que:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{n+1}$$

Se P for um número primo, é necessariamente diferente dos primos $p_1, p_2, p_3, ..., pn$, pois sua divisão por qualquer um deles tem resto 1. Em contrapartida, se P é composto, na fatoração de P existe um número primo q tal que $q > pn$. Logo existe um novo número primo.

Exemplos numéricos:

$p = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ (primo), $q = 7 > p_n = 3$

$p = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ (primo), $q = 31 > p_n = 5$

$p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$ (primo), $q = 211 > p_n = 7$

$p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$ (primo), $q = 2311 > p_n = 11$

$p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$ (composto), $q = 30031 > p_n = 13$

Podemos fatorar o número 30031:

$30031 = 59 \cdot 509$

Como os números 59 e 509 são os fatores primos do número 30031, logo, além do número primo $pn = 13$, existem mais dois novos números primos q e p_1, tais que:

$$q = 59 > p_n = 13 \quad \text{e} \quad q_1 = 509 > q = 59 > p_n = 13$$

Quando vi a palavra “fatoração” e a expressão “fatores primos” na demonstração de Euclides, veio-me a ideia de tentar dar uma demonstração usando fatoração e os fatores primos de um número inteiro. Quando digo “tentar dar uma demonstração”, é porque ainda não tenho certeza se na minha demonstração existe alguma falha.

Deixo uma advertência: já que seria, até impossível, consultar todos os livros de teoria dos números publicados, por autores brasileiros e estrangeiros, e como já houve casos, na história da Matemática, de dois matemáticos morando em países diferentes fazerem demonstrações idênticas, logo, se por acaso alguma demonstração idêntica a minha já foi publicada por algum matemático, brasileiro ou estrangeiro, é mera coincidência.

Nossa demonstração da infinidade de números primos

Seja $x > 1$ um número inteiro. O sucessor de x é $x + 1$. Como x e $x + 1$ são primos entre si, logo, $x(x + 1)$ tem no mínimo dois fatores primos distintos.

Exemplo

x	$x(x + 1)$	Fatoração	Fatores primos Distintos
2	6	2, 3	2, 3 (dois)
3	12	2, 2, 3	2, 3 (dois)
4	20	2, 2, 5	2, 3 (dois)
5	30	2, 3, 5	2, 3, 5 (três)

O sucessor de $x(x + 1)$ é $x(x + 1) + 1$. Pelo mesmo raciocínio anterior, $x(x + 1) + 1$ e $x(x + 1)$ são primos entre si. Multiplicando os dois números, temos:

$$[x(x + 1)] \cdot [(x + 1) + 1]$$

Como um de seus fatores tem pelo menos dois fatores primos, logo, o produto dos dois tem pelo menos três fatores primos distintos.

Exemplo

x	$[x(x + 1)][x(x + 1)+1]$	Fatoração	Fatores primos Distintos
2	42	2, 3, 7	2, 3, 7 (três)
3	156	2, 2, 3, 13	2, 3, 13 (três)
4	292	2, 3, 73	2, 3, 73 (três)
5	930	2, 3, 5, 31	2, 3, 5, 31 (quatro)

Como o processo multiplicativo pode ser repetido indefinidamente, e já que o n-ésimo produto terá no mínimo n-ésimo + 1 fatores primos distintos, logo, há infinitos números primos.

APÊNDICE – APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS COM TRÊS VARIÁVEIS

Vimos a regra para resolver equações diofantinas pelo segundo método de sebá, um exemplo de aplicação da equação diofantinas com três variáveis e duas equações:

$$x + y + z = 100 \qquad (1)$$
$$1000x + 500y + 50z = 10000 \qquad (2)$$

Há aplicações das equações diofantinas com três variáveis e apenas uma equação. É o que veremos a seguir.

Exemplo 01

Para transportar 31 estudantes de Rio Claro-SP a um evento que ocorreria em Campinas-SP, a Universidade Estadual Paulista (UNESP) disponibilou 3 tipos de veículos, A, B e C, respectivamente, com capacidade para 4, 5 e 7 passageiros. Qual o número mínimo de veículos necessários para levar todos os estudantes de modo que pelo menos um veículo de cada tipo seja utilizado e todos os assentos sejam ocupados?

→ **Resolução:**

Sejam x, y e z, respectivamente, o número de veículos do tipo A, B e C que foram disponibilizados pela UNESP. Como o veículo A tem capacidade para 4 passageiros, o B para 5 passageiros e o C para 7 passageiros, representemos o número de veículos do tipo A por 4x, do tipo B por 5y e do tipo C por 7z. assim, vemos que o número de veículos necessários para levar os estudantes pode ser modelado pela seguinte equação diofantinas:

$$4x + 5y + 7z = 31 \qquad (1)$$

Como o mdc(4, 5, 7) = 1 e como 1 divide 31, logo, a equação diofantinas (1) tem solução em inteiros.

A equação diofantinas (1) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$4x + 5y = 31 - 7z \qquad (2)$$

Para que valores de z, 31 – 7z é inteiro? Basta fazer: 31 – 7z > 0. Portanto, para z =1, 2, 3, ou 4, a expressão 31 – 7z é sempre inteira.

Para z = 0

Temos: 4x + 5y = 31 (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 31, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como nem 4 nem 5 divide 31, vamos resolver a equação diofantina usando o segundo método de Sebá.

$$2 \cdot 4 = 8 - 1 = 7 \text{ (7 não é divisível por 5)}$$
$$3 \cdot 4 = 12 - 1 = 11 \text{ (11 não é divisível por 5)}$$
$$4 \cdot 4 = 16 - 1 = 15 \text{ (15 é divisível por 5)}$$
$$16 - 15 = 1$$
$$4(4) + 5(-3) = 1 \qquad (3)$$

Multiplicando ambos os membros da equação(3) por 31, obtém-se:

$$4(4 \cdot 31) + 5(-3 \cdot 31) = 1(31)$$
$$4(124) + (-93) = 31$$

Portanto, $x_0 = 124$ e $y_0 = -93$ é uma solução particular da equação diofantina 4x + 5y = 31.

A solução geral da equação diofantina, para o mdc(4, 5) = 1, é:

$$x = 124 + \frac{5}{1}t \geq 0 \text{ ou } x = 124 + 5t \geq 0$$

$$y = -93 - \frac{4}{1}t \geq 0 \text{ ou } y = -93 - 4t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$t \geq -24 \text{ e } t \leq -23$$
$$-24 \leq t \leq -23$$

Portanto, t = – 24, –23. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se duas soluções: x = 4, y = 3 e z = 0 e a outra: x = 9, y = –1 e z = 0 (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para z = 1

Temos: 4x + 5y = 24 (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 24, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como 4 divide 24, vamos resolver a equação diofantina usando o primeiro método de Sebá.

$$\frac{4x}{4} + \frac{5y}{4} = \frac{24}{4}$$
$$x + \frac{5y}{4} = 6$$

Para y = 4, x = 1 e z = 1

Para z = 2

Temos: 4x + 5y = 17 (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 17, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como nem 4 nem 5 divide 17, vamos resolver a equação diofantina usando o segundo método de Sebá.

$2 \cdot 4 = 8 - 1 = 7$ (7não é divisível por 5)
$3 \cdot 4 = 12 - 1 = 11$ (11 não é divisível por 5)
$4 \cdot 4 = 16 - 1 = 15$ (15 é divisível por 5)
$16 - 15 = 1$
$$4(4) + 5(-3) = 1 \qquad (4)$$

Multiplicando ambos os membros da equação(4) por 17, obtém-se:

$$4(4 \cdot 17) + 5(-3 \cdot 17) = 1(17)$$
$$4(68) + (-51) = 17$$

Portanto, $x_0 = 68$ e $y_0 = -51$ é uma solução particular da equação diofantina 4x + 5y = 24.

A solução geral da equação diofantina, para o mdc(4, 5) = 1, é:

$$x = 68 + \frac{5}{1}t \geq 0 \text{ ou } x = 68 + 5t \geq 0$$

$$y = -51 - \frac{4}{1}t \geq 0 \text{ ou } x = -51 - 4t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$t \geq -13 \text{ e } t \leq -12$$
$$-13 \leq t \leq -12$$

Portanto, t = – 13, –12. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se duas soluções: x = 3, y = 1 e z = 2 e a outra: x = 8, y = –3 e z = 2 (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para z = 3

Temos: 4x + 5y = 10 (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como 5 divide 10, vamos resolver a equação diofantina usando o primeiro método de Sebá.

$$\frac{4x}{5} + \frac{5y}{5} = \frac{10}{5}$$

$$\frac{4x}{5} + y = 2$$

Para x = 5, y = – 2 e z = 3 (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para z = 4

Temos: $4x + 5y = 3$ (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 3, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros..

Como nem 4 nem 5 divide 3, vamos resolver a equação diofantina usando o segundo método de Sebá.

$2 \cdot 4 = 8 - 1 = 7$ (7não é divisível por 5)

$3 \cdot 4 = 12 - 1 = 11$ (11 não é divisível por 5)

$4 \cdot 4 = 16 - 1 = 15$ (15 é divisível por 5)

$16 - 15 = 1$

$4(4) + 5(-3) = 1$ (5)

Multiplicando ambos os membros da equação(5) por 3, obtém-se:

$4(4 \cdot 3) + 5(-3 \cdot 3) = 1(3)$

$4(12) + 5(-9) = 3$

Portanto, $x_0 = 12$ e $y_0 = -9$ é uma solução particular da equação diofantina $4x + 5y = 3$.

A solução geral da equação diofantina, para o mdc(4, 5) = 1, é:

$$x = 12 + \frac{5}{1}t \geq 0 \quad \text{ou} \quad x = 12 + 5t \geq 0$$

$$y = -9 - \frac{4}{1}t \geq 0 \quad \text{ou} \quad x = -9 - 4t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

$$t \geq -12 \text{ e } t \leq -12$$

Portanto, t = –12. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se a seguinte solução em inteiros: x = 2, y = – 1 e z = 4 (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Portanto, o transporte dos estudantes pode ocorrer de duas maneiras: 1 veículo do tipo A, 4 do tipo B e 1 do tipo C ou 3 veículos do tipo A, 1 do tipo B e 2 do tipo C.

Exemplo 02

O novo Código de Trânsito do Brasil adota o sistema de pontoação em carteira de motoristas. Em caso de infringir as leis do trânsito, são atribuídos ao motorista 4 pontos quando se trata de infração leve; 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima. Se um motorista acumulou 37 pontos em sua carteira, quantas vezes foi autuado por infração gravíssima?

→ **Resolução:**

Sejam x, y e z, respectivamente, infração leve, infração grave e infração gravíssima. Como a infração leve são atribuídos 4 pontos, a grave 5 pontos e a gravíssima 7 pontos, representemos a infração leve por 4x, a grave por 5y e a gravíssima por 7z. O problema pode ser modelado pela seguinte equação diofantina:

$$4x + 5y + 7z = 37 \qquad (1)$$

Como o mdc(4, 5, 7) = 1 e como 1 divide 35, logo, a equação diofantinas (1) tem solução em inteiros.

A equação diofantinas (1) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$4x + 5y = 37 - 7z \qquad (2)$$

Para que valores de z, $37 - 7z$ é inteiro? Basta fazer: $37 - 7z \geq 0$. Portanto, para z = 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, a expressão $37 - 7z$ é sempre inteira.

Para z = 0

Temos: $4x + 5y = 37$ (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 37, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como nem 4 nem 5 divide 37, vamos resolver a equação diofantina usando o segundo método de Sebá.

$2 \cdot 4 = 8 - 1 = 7$ (7 não é divisível por 5)
$3 \cdot 4 = 12 - 1 = 11$ (11 não é divisível por 5)
$4 \cdot 4 = 16 - 1 = 15$ (15 é divisível por 5)
$16 - 15 = 1$
$4(4) + 5(-3) = 1$ (3)

Multiplicando ambos os membros da equação(3) por 37, obtém-se:
$4(4 \cdot 37) + 5(-3 \cdot 37) = 1(37)$
$4(148) + 5(-111) = 37$

Portanto, $x_0 = 148$ e $y_0 = -111$ é uma solução particular da equação diofantina $4x + 5y = 37$.

A solução geral da equação diofantina, para o mdc(4, 5) = 1, é:

$$x = 148 + \frac{5}{1}t \geq 0 \text{ ou } x = 148 + 5t \geq 0$$

$$y = -111 - \frac{4}{1}t \geq 0 \text{ ou } x = -111 - 4t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:
$t \geq -29$ e $t \leq -27$
$-29 \leq t \leq -27$

Portanto, $t = -29, -28, -27$. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se três soluções: $x = 3$, $y = 5$ e $z = 0$; $x = 8$, $y = 1$ e $z = 0$ e a outra: $x = 13$, $y = -3$ e $z = 0$ (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para z = 1

Temos: $4x + 5y = 30$ (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 30, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como 5 divide 30, vamos resolver a equação diofantina usando o primeiro método de Sebá.

$$\frac{4x}{5} + \frac{5y}{5} + \frac{30}{5}$$

$$\frac{4x}{5} + y = 6$$

Para x = 5 e y = 2

Logo, $x_0 = 5$ e $y_0 = 2$ é uma solução particular da equação 4x + 5y = 30. Consequentemente, a solução geral da equação que apresenta mdc(4, 5) = 1, se expressa por:

$$x = 5 + \frac{5}{1}t \geq 0 \quad \text{ou} \quad x = 5 + 5t \geq 0$$

$$y = 2 - \frac{4}{1}t \geq 0 \quad \text{ou} \quad x = 2 - 4t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

t ≥ – 1 e t ≤ 0

– 1 ≤ t ≤ 0

Portanto, t = –1, 0. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se duas soluções: x = 0, y = 6 e z = 1;

x = 5, y = 2 e z = 1.

Para z = 2

Temos: 4x + 5y = 23 (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 23, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como nem 4 nem 5 divide 23, vamos resolver a equação diofantina usando o segundo método de Sebá.

2*4 = 8 – 1 = 7 (7não é divisível por 5)

3*4 = 12 – 1 = 11 (11 não é divisível por 5)

4*4 = 16 – 1 = 15 (15 é divisível por 5)

16 – 15 = 1

4(4) + 5(– 3) = 1 (4)

Multiplicando ambos os membros da equação(4) por 23, obtém-se:

4(4 · 23) + 5 (–3 · 23) = 1(23)

4(92) + 5(– 69) = 23

Portanto, $x_0 = 92$ e $y_0 = -69$ é uma solução particular da equação diofantina $4x + 5y = 23$.

A solução geral da equação diofantina, para o mdc(4, 5) = 1, é:

$$x = 92 + \frac{5}{1}t \geq 0 \quad \text{ou} \quad x = 92 + 5t \geq 0$$

$$y = -69 - \frac{5}{1}t \geq 0 \quad \text{ou} \quad y = -69 - 4t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:
$t \geq -18$ e $t \leq -17$
$-18 \leq t \leq -17$

Portanto, $t = -18, -17$. Substituindo t nas equações acima, obtém-se duas soluções: $x = 4$, $y = 1$ e $z = 2$ e a outra: $x = 9$, $y = -3$ e $z = 2$ (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para z = 3

Temos: $4x + 5y = 16$ (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 30, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros.

Como 4 divide 16, vamos resolver a equação diofantina usando o primeiro método de Sebá.

$$\frac{4x}{4} + \frac{5y}{4} = \frac{16}{4}$$
$$x + \frac{5y}{4} = 4$$

Para $y = 4$, $x = -1$

Logo, $x_0 = -1$ e $y_0 = 4$ é uma solução particular da equação $4x + 5y = 16$. Consequentemente, a solução geral da equação que apresenta mdc(4, 5) = 1, se expressa por:

$$x = -1 + \frac{5}{1}t \geq 0 \;\text{ ou }\; x = -1 + 5t \geq 0$$
$$y = 4 - \frac{4}{1}t \geq 0 \;\text{ ou }\; y = 4 - 4t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:
$t \geq 0$ e $t \leq 1$
$0 \leq t \leq 1$
Portanto, t = 0, 1. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se duas soluções: x = 4, y = 0 e z = 3;
x = –1 , y = 4 e z = 3 (É solução para a equação diofantinas 4x + 5y + 7z = 16, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para z = 4

Temos: 4x + 5y = 9 (Equação diofantinas com duas variáveis)
Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 9, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros..
Como nem 4 nem 5 divide 9, vamos resolver a equação diofantina usando o segundo método de Sebá.
2 · 4 = 8 – 1 = 7 (7não é divisível por 5)
3 · 4 = 12 – 1 = 11 (11 não é divisível por 5)
4 · 4 = 16 – 1 = 15 (15 é divisível por 5)
16 – 15 = 1
4(4) + 5(– 3) = 1 (5)

Multiplicando ambos os membros da equação(5) por 9, obtém-se:
4(4 · 9) + 5 (–3 · 9) = 1(9)
4(36) + 5(– 27) = 9

Portanto, $x_0 = 36$ e $y_0 = -27$ é uma solução particular da equação diofantina 4x + 5y = 9.
A solução geral da equação diofantina, para o mdc(4, 5) = 1, é:

$$x = 36 + \frac{5}{1}t \geq 0 \;\text{ ou }\; x = 36 + 5t \geq 0$$

$$y = -27 - \frac{4}{1}t \geq 0 \text{ ou } y = -27 - 4t \geq 0$$

Sendo assim, temos que:

t ≥ – 7 e t ≤ – 6

Portanto, t = –7, –6. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se a seguinte solução em inteiros: x = 3, y = – 1 e z = 4 (É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Para z = 5

Temos: 4x + 5y = 2 (Equação diofantinas com duas variáveis)

Como o mdc(4, 5) = 1 e como 1 divide 2, logo, a equação diofantina tem solução em inteiros..

Como nem 4 nem 5 divide 2, vamos resolver a equação diofantina usando o segundo método de Sebá.

2 · 4 = 8 – 1 = 7 (7não é divisível por 5)

3 · 4 = 12 – 1 = 11 (11 não é divisível por 5)

4 · 4 = 16 – 1 = 15 (15 é divisível por 5)

16 – 15 = 1

4(4) + 5(– 3) = 1 (6)

Multiplicando ambos os membros da equação(6) por 2, obtém-se:

4(4 · 2) + 5 (–3 · 2) = 1(2)

4(8) + 5(– 6) = 2

Portanto, $x_0 = 8$ e $y_0 = -6$ é uma solução particular da equação diofantina 4x + 5y = 2.

A solução geral da equação diofantina, para o mdc(4, 5) = 1, é:

$$x = 8 + \frac{5}{1}t \geq 0 \text{ ou } x = 8 + 5t \geq 0$$

$$y = -6 - \frac{4}{1}t \geq 0 \text{ ou } y = -6 - 4t \geq 0$$

Portanto, t = –1. Substituindo *t* nas equações acima, obtém-se a seguinte solução em inteiros: x = 3, y = – 2 e z = 5(É solução para a equação diofantina, mas não é solução para o problema em si. Por quê?).

Resposta

3 infrações leves, 5 infrações graves e nenhuma infração gravíssima;

8 infrações leves, 1 infração grave e nenhuma infração gravíssima;

Nenhuma infração leve, 6 infrações graves e 1 infração gravíssima;

5 infrações leves, 2 infrações grave e 1 infrações gravíssimas;

4 infrações leves, uma infração grave e 4 infrações gravíssimas;

4 infrações leves, nenhuma infração grave e 3 infrações gravíssimas.

Verificação:

4(3) + 5(5) + 7(0) = 37
4(8) + 5(1) + 7(0) = 37
4(0) +5(6) + 7(1) = 37
4(5) + 5(2) + 7(1) = 37
4(4) + 5(1) + 7(4) = 37
4(4) + 5(0) + 7(3) = 37

Infração leve: 3 + 8 + 0 + 5 + 4 + 4 = 24 vezes

Infração grave: 5 + 1 + 6 + 2 + 1 + 0- = 15 vezes.

Infração gravíssima: 0 + 0 + 1 + 1 + 4 + 3 = **9 vezes**.

REFERÊNCIAS

NASCIMENTO, Sebastião Vieira do. Desvendando os segredos do triângulo retângulo e descobrindo curiosidades até hoje não conhecidas. Rio de Janeiro: 2018

________. **Como reduzir os custos de materiais nas atividades do cotidiano usando os ternos pitagóricos ou a equação do segundo grau**. Lisboa-Portugal: Chiado Editora, 2016.

________. **Matemática lúdica versus matemática crítica**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2015.

________. **A matemática do ensino fundamental e médio aplicada à vida**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2011.

________. **Desvendando os segredos dos problemas da matemática e descobrindo caminhos para resolvê-los**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.

OLIVEIRA, Silvio Barbosa de. **As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio**. Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2006.

Internet

http://www.obaricentrodamente.blogspot.com.br/

http://fatosmatematica.blogspot.com.br/

https://matemagicasenumeros.blogspot.com.br/

http://www.vivendoentresimbolos.com/

http://www.uesb.br/mat/download/Trabamonografia/2013/Dinguiston.pdf

https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3124/5/Borges%2c%20F%C3%A1bio%20Vieira%20de%20Andrade.pdf

http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29153/000775854.pdf?...1

http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/12990/1/2015_dis_cwafreitas.pdf

http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/7454/mod_resource/content/0/TCC%20Rafael.pdf

http://cascavel.ufsm.br/tede//tde_arquivos/54/TDE-2016-06-27T123942Z-7431/Publico/CAMPOS,%20ADILSON%20DE.pdf

https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11059/1/dissertacao_silvio_barbosa_oliveira.pdf

https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/149949/souza_rs_me_rcla.pdf?sequence=5

http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20695/Livro+EDL+Uma+abordagem+didatico+epistemogica.pdf

SOBRE O AUTOR

Sebastião Vieira do Nascimento, o popular Sebá, é graduado em Economia e Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Federal da Paraíba. É professor titular (por concurso) aposentado da Universidade Federal de Campina Grande-PB. Durante os vinte e sete anos que atuou como professor, lecionou as seguintes disciplinas: Matemática Financeira, Engenharia Econômica e Pesquisa Operacional. Atualmente dedica seu tempo escrevendo livros nas áreas que atuou (já foram publicados 12 (doze) livros pelas Editoras: Ciência Moderna-RJ, Chiado-Lisboa e Gramma-RJ) e na área de teoria dos números.

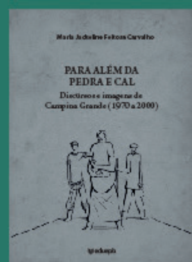
Sobre o livro

Projeto Gráfico e Editoração Jéfferson Ricardo Li
Capa Erick Ferreira Cabra
Foto da Capa Pixabay.com
Tipologias Utilizadas Germano 14pt
Times New Roman
Impressão Gráfica da UEPB

Lançamentos

A tradição da civilidade nos livros de leitura no Império e na Primeira República

Para além da pedra e cal



Indicadores de sustentabilidade para agrossistemas

Quando o leitor encontrar este livro numa determinada livraria, perguntará a si mesmo: "se já existem, em língua portuguesa e em outros idiomas, tantos livros sobre teoria dos números, por que mais um?" Já que existem vários motivos para uma pessoa escrever um livro, é difícil responder à pergunta acima. No meu caso, porém, existiam dois motivos fortes para escrever o presente livro. O primeiro, era a vontade de desmistificar o ensino da matemática. E o segundo, em virtude da literatura existente sobre teoria dos números, não apresentarem nenhuma aplicação prática com a qual o leitor se defronta no dia a dia. Aqui, caro leitor, você vai encontrar em um único volume, alguns assuntos não encontrados em nenhum livro de teoria dos números publicados em língua portuguesa ou estrangeiras.

ISBN: 978-85-7879-538-2

9 788578 795382

eduepb